

Devoir Surveillé 03

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Douze questions indépendantes).

1. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ puis le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$ avec des factorielles.
3. (a) Énoncer la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
4. (a) Soit $n, k \in \mathbb{N}$. Rappeler la définition de $\binom{n}{k}$.
(b) Rappeler la formule de Pascal et la démontrer.
5. Linéariser $\cos^3(x)$ et $\cos(2x) \sin^2(x)$.
6. (a) Déterminer a, b et c trois réels tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
(b) Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
7. (a) Rappeler la formule du binôme de Newton.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.
(c) Montrer que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$ avec $2 \leq k \leq n$, on a $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$.
(d) En déduire la valeur de $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ pour tout $n \geq 2$.
8. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le plus possible la somme $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Calculer, indépendamment les unes des autres les sommes :

$$A_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^j, \quad B_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} 2^j, \quad C_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} 2^j.$$

On pourra inverser l'ordre de sommation pour C_n .

- (b) Vérifier que $A_n + 3^n = B_n + C_n$, puis retrouver ce résultat d'une autre façon.
11. Résoudre $z^8 + z^4 + 1 = 0$ dans \mathbb{C} .
12. (a) Mettre $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme exponentielle.
(b) Résoudre l'équation $z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.
13. On considère les points du plan complexe $A(-i), B(1+i)$ et $C(-1+2i)$.
(a) Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle.
On fera un dessin.
(b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré direct.

Exercice 2 (Des complexes et une droite).

On considère les deux points du plan A et B , de coordonnées respectives $(4, 1)$ et $(-6, -3)$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. On considère l'équation $(E) : z^3 + (-3 - 3i)z^2 + (-3 + 4i)z - 15 + 9i = 0$.
 - (a) Déterminer les racines carrées de $21 + 20i$.
On donne $29^2 = 841$.
 - (b) On admet que (E) admet une solution imaginaire pure $z_0 = ib \in i\mathbb{R}$. Déterminer la valeur de z_0 .
 - (c) Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de (E) .
3. Vérifier que les points $D(z_1)$ et $E(z_2)$ sont sur la droite (AB) .

Exercice 3 (Sommes et fonctions).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.
2. Déterminer une expression simplifiée de f . On distinguera deux cas suivant la valeur de x .
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n k2^{k-1}$.

Correction du Devoir Surveillé 03

Correction de l'exercice 1 :

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on prend $x \in [-1, +\infty[$ et on note que $(1+x)^0 = 1$ et $1+0 \times x = 1$, donc on a bien $(1+x)^0 \geq 1+0 \times x$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.
Soit $x \in [-1, +\infty[$. Par HR : $(1+x)^n \geq 1+nx$, et comme $1+x \geq 0$, $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2$, donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$. Or $nx^2 \geq 0$, donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx$.

2. • Produit des nombres pairs : $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$

• Produit des nombres impairs : $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n (2k)}$, donc $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

3. (a) Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et $p \leq d$ deux entiers naturels :

$$\sum_{k=p}^d u_k = \begin{cases} (d-p+1)u_p & \text{si } q = 1 \\ u_p \frac{1-q^{d-p+1}}{1-q} & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) On commence par calculer $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ikt}$. Si $t \equiv 0[2\pi]$, alors $S_n = n+1$. Sinon, $e^{it} \neq 1$ et :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \\ &= \frac{e^{i \frac{n+1}{2} t} 2i \sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{e^{i \frac{t}{2}} 2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= e^{i \frac{nt}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

donc :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \operatorname{Re}(S_n) = \begin{cases} n+1 & \text{si } t \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\cos\left(\frac{nt}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \operatorname{Im}(S_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \equiv 0[2\pi] \\ \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

4. (a) $\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sinon} \end{cases}$

(b) Soient $n, k \in \mathbb{N}$. On a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

- Premier cas : si $k > n$, alors $k+1 > n$ et $k+1 > n+1$, donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} = 0$ et la formule est vraie.
- Deuxième cas : si $k = n$, alors $k+1 > n$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 1 + 0 = \binom{n+1}{k+1}$.
- Troisième cas : si $0 \leq k \leq n-1$, alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Dans les trois cas, la formule est vérifiée.

5. On utilise les formules d'Euler et de Newton :

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \\ &= \frac{2\cos(3x) + 6\cos(x)}{8} \end{aligned}$$

Donc $\cos^3(x) = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$.

$$\begin{aligned} \cos(2x)\sin^2(x) &= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{(e^{2ix} + e^{-2ix})(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})}{-8} \\ &= -\frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1 + 1 - 2e^{-2ix} + e^{-4ix}}{8} \\ &= -\frac{2\cos(4x) - 4\cos(2x) + 2}{8} \end{aligned}$$

Donc $\cos(2x)\sin^2(x) = \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(4x)}{4} - \frac{1}{4}$.

6. (a) On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui conviennent. On met les termes de droite au même dénominateur :

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} = \frac{a(k+1)(k+2) + bk(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

Ainsi, il suffit de prendre a, b et c tels que :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b+c = -\frac{1}{2} \\ 2b+c = -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2}$.

(b) On utilise la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

On fait le changement d'indice $i = k + 1$ dans la deuxième somme et $j = k + 2$ dans la troisième :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \sum_{i=3}^n \frac{1}{i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} \sum_{j=3}^n \frac{1}{j} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

7. (a) Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

(c) Soient k et n deux entiers naturels tels que $2 \leq k \leq n$. Calculons :

$$k(k-1) \binom{n}{k} = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}$$

On a bien $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$.

(d) Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente,

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2}$$

On fait le changement d'indice $i = k - 2$, de sorte que i va de 0 à $n - 2$:

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i}$$

D'après la formule du binôme de Newton : $\sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}$. Donc $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

8. • Initialisation : pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^0 (-1)^k k^2 = 0$ et $(-1)^0 \frac{0(0+1)}{2} = 0$, donc la formule est vraie au rang 0.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 &= (-1)^{n+1} (n+1)^2 + \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 \\ &= -(-1)^n (n+1)^2 + (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (-1)^n (n+1) \left(-(n+1) + \frac{n}{2} \right) \\ &= (-1)^n (n+1) \frac{-2n-2+n}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

La formule est vérifiée au rang $n+1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

9. On réécrit avec une somme double de sorte que celle à l'intérieur somme sur i :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^j i \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j \end{aligned}$$

Donc $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} = \frac{n(n+1)}{4}$.

10. (a)

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{j=0}^n 2^j \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= \sum_{j=0}^n 2^j 2^n \\ &= 2^n \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\ &= 2^n (2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i 2^j \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1-2^{i+1}}{1-2} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (2^{i+1} - 1) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\ &= 2 \times 3^n - 2^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=i}^n 2^j \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i (2^{n-i+1} - 1) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i 2^{n-i+1} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n+1} - 3^n \\ &= 2^n \times 2^{n+1} - 3^n \end{aligned}$$

Donc

$$A_n = 2^{2n+1} - 2^n, \quad B_n = 2 \times 3^n - 2^n, \quad C_n = 2^{2n+1} - 3^n$$

- (b) On trouve bien $A_n + 3^n = B_n + C_n$. On part ensuite du terme de droite :

$$\begin{aligned} B_n + C_n &= \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \binom{n}{i} 2^j + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \binom{n}{i} 2^j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i} 2^j + \sum_{1 \leq i=j \leq n} \binom{n}{i} 2^j \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \binom{n}{i} 2^j + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^i \end{aligned}$$

car on calcule deux fois la somme lorsque les indices i et j sont égaux. Donc

$$B_n + C_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^j + 3^n$$

et $B_n + C_n = A_n + 3^n$.

11. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z^8 + z^4 + 1 = 0 \iff z^4$ est solution de $x^2 + x + 1 = 0$.
 Or, le discriminant de cette équation vaut $-3 = (i\sqrt{3})^2$, donc ses solutions sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$.
 Ainsi,

$$\begin{aligned} z^8 + z^4 + 1 = 0 &\iff z^4 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ ou } z^4 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{6}}}\right)^4 = 1 \text{ ou } \left(\frac{z}{e^{-\frac{i\pi}{6}}}\right)^4 = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, z = e^{\frac{\pm i\pi}{6} + ik} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ e^{\frac{\pm i\pi}{6} + ik}, \text{ avec } k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$.

12. (a) Soit on met d'abord le complexe sous forme algébrique, soit on met directement le numérateur et le dénominateur sous forme exponentielle. Ici, on trouve que $1 + i\sqrt{3}$ a pour module 2 et pour argument $\frac{\pi}{3}$. De plus, $1 - i\sqrt{3}$ est son conjugué, donc a pour module 2 et pour argument $-\frac{\pi}{3}$.

Ainsi $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- (b) Soit $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^6 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} &\iff z^6 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ &\iff \left(\frac{z}{e^{\frac{2i\pi}{18}}}\right)^6 = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket, z = e^{\frac{2ik\pi}{6} + \frac{2i\pi}{18}} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{6} + \frac{2i\pi}{18}}, k \in \{0, 1, \dots, 5\} \right\}$.

13. (a) En faisant un dessin, le triangle a l'air rectangle en B. On calcule donc

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{(-1 - 2i)(-2 - i)}{5} = i.$$

Donc $\frac{BA}{BC} = |i| = 1$ et $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
 Ainsi ABC est bien rectangle isocèle en B.

- (b) On cherche l'affixe de D tel que ABD soit rectangle isocèle direct en A, donc

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i \iff z_D = i(z_B - z_A) + z_A = i(1 + 2i) - i.$$

Donc $z_D = -2$.

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de la droite (AB) vaut $\frac{-3 - 1}{-6 - 4} = \frac{2}{5}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ telle qu'une équation de (AB) soit $y = \frac{2}{5}x + b$. Comme A est sur la droite, b vérifie $1 = \frac{8}{5} + b$, donc $b = -\frac{3}{5}$.

Une équation de (AB) est $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$.

2. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ avec $(a + ib)^2 = 21 + 20i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 21 \\ 2ab = 20 \\ a^2 + b^2 = 29 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 25 \\ b = \frac{10}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \end{cases}$.

Les deux racines carrées de $21 + 20i$ sont donc $\pm(5 + 2i)$.

3. On pose $z_0 = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$ une solution de (E), de sorte que $-ib^3 + (3 + 3i)b^2 + (-3i - 4)b - 15 + 9i = 0$. La partie réelle et la partie imaginaire du terme de gauche sont donc nulles : $\begin{cases} -b^3 + 3b^2 - 3b + 9 = 0 \\ 3b^2 - 4b - 15 = 0 \end{cases}$. Les solutions de la deuxième équation sont 3 et $-\frac{5}{3}$. On vérifie que 3 est solution de la première équation. Donc $z_0 = 3i$.

4. On factorise $z^3 + (-3 - 3i)z^2 + (-3 + 4i)z - 15 + 9i = (z - 3i)(z^2 + az + b)$, de sorte que $-3ib = -15 + 9i$ donc $b = -5i - 3$ et $a - 3i = -3 - 3i$, donc $a = -3$. Donc on cherche les solutions de $z^2 - 3z - 3 - 5i = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 - 4(-3 - 5i) = 21 + 20i = (5 + 2i)^2$. On obtient alors $z_1 = \frac{3 + 5 + 2i}{2} = 4 + i$ et $z_2 = \frac{3 - 5 - 2i}{2} = -1 - i$.

5. On remarque que $D = A$ et comme $(-1, -1)$ est solution de $y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$, $E \in (AB)$.

Correction de l'exercice 3 :

1. La fonction f est une fonction polynomiale, donc elle est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$.

2. Si $x = 1$, $f(x) = n + 1$. Sinon, on a une somme géométrique avec une raison différente de 1 : $f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

3. La somme cherchée est $f'(2)$. Pour $x \neq 1$, on peut dériver l'autre expression de f :

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Pour $x = 2$, on trouve $f'(2) = \frac{n2^{n+1} - (n+1) \times 2^n + 1}{(1-2)^2} = 2n2^n - (n+1) \times 2^n + 1 = (n-1)2^n + 1$.

Donc $\sum_{k=0}^n k2^{k-1} = f'(2) = (n-1)2^n + 1$.