

Inégalités - Exercices

Exercice 1. 1. Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible (c'est-à-dire en les simplifiant au maximum). Il faut essayer de faire le maximum de simplifications à chaque étape avant de continuer les calculs.

$$(a) A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7}$$

$$(b) B = \frac{7}{8} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{14}$$

$$(c) C = 3 \times \frac{9}{2}$$

$$(d) D = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$

$$(e) E = \frac{3}{\frac{9}{2}}$$

$$(f) F = \frac{\frac{9}{2}}{3}$$

$$(g) G = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$$

$$(h) H = \left(3 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{8-2}{5+2}$$

$$(i) I = \frac{3 - \frac{5}{7} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}}$$

$$(j) J = \frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$$

2. Mettre les fractions suivantes au même dénominateur puis simplifier au maximum. Il faut essayer de choisir le dénominateur le plus simple à chaque fois.

$$(a) A = \frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x}{x-2}$$

$$(b) B = \frac{u-1}{u+1} - \frac{u+1}{u-1}$$

$$(c) C = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2}$$

Exercice 2. Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression.

$$1. A = \frac{5^2 + 4^2}{34 + 28}$$

$$2. B = 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$$

$$3. C = \frac{2 \cdot 10^5 \times (5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3)}{7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2}$$

$$4. D = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$5. E = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$$

$$6. F = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$$

$$7. G = (a^3)^2 \times a^{-4}$$

$$8. H = a^2 b^{-3} (ab)^4$$

Exercice 3. 1. Calculer les nombres suivants (les résultats doivent être mis sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers) :

$$(a) A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$$

$$(b) B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$$

$$(c) C = (2\sqrt{2} - 5)(\sqrt{2} + \sqrt{5})$$

$$(d) D = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(e) E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

$$(f) F = (2\sqrt{5} - 3)^2 - (2\sqrt{5} + 3)^2$$

2. Écrire les nombres suivants comme des quotients ayant un dénominateur entier :

$$(a) A = \sqrt{\frac{1}{24}}$$

$$(b) B = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$(c) C = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$(d) D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$(e) E = \frac{3}{\sqrt{2} - 1}$$

$$(f) F = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$(g) G = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

$$(h) H = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

Exercice 4. 1. Développer et réduire les expressions suivantes.

$$(a) A(x) = -(x-3) + 3(2x-1) - 2(2x-3)$$

$$(b) B(x) = x - 2 - 5(x-3) - 3(-3x-4)$$

$$(c) C(x) = x(x-1)(x-4) - x^2(x-3)$$

$$(d) D(x) = (x-1)^2(x+2) - (2x+1)^2(x+1)$$

$$(e) E(x, y) = (3x-2y)^2 - 5(x+3y)^2$$

2. Factoriser les expressions suivantes.

$$(a) A(x) = (x+1)(x-3) - 2(x+1)$$

$$(b) B(x) = (5-2x)(x-1) + x^2 - 1$$

$$(c) C(x) = (1-2x)^2 - x^2$$

$$(d) D(x) = 4x^2 - 1 + (2x-1)(x+1)$$

$$(e) E(x) = 4x^2 - 8x + 4 - (x+7)^2$$

$$(f) F(x) = x^2 - 4 + x - 2$$

$$(g) G(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$$

3. (a) Posons $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

i. Vérifier que $A^2 = 16$.

ii. Justifier que $\sqrt{9-4\sqrt{5}} \leq \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. Quel est le signe de A ?

iii. Que vaut A ?

(b) Reprendre les trois questions précédentes pour montrer que :

$$i. B = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{10} \quad ii. C = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14} \quad iii. D = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$$

Exercice 5. 1. Résoudre les équations/inéquations suivantes :

(a) $13x + 2 - (x - 3) = x - 5 - 3(x + 12) + 4x$	(e) $\frac{1-2\alpha}{5} - \frac{\alpha-2}{10} > \frac{5\alpha+2}{2} - \frac{1}{5}$
(b) $5(3x-1) - (1-2x) \leq 3(5x-2)$	(f) $\frac{3x+5}{7} = \frac{5x-2}{5}$
(c) $\frac{a-1}{4} - 5 < \frac{2a-3}{2} + \frac{3}{4}$	(g) $\frac{5(t-2)}{8} + \frac{3(1-t)}{5} = \frac{2t+3}{10}$
(d) $\frac{2x+3}{6} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3} + 2$	

2. Exprimer l'inconnue entourée en fonction des autres :

(a) $\frac{2Ru}{nT} = \frac{1}{\boxed{A}}$	(c) $\frac{2Ru}{n\boxed{T}} = \frac{1}{A}$	(e) $U_2 = \frac{\boxed{U_m}}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3}} + \frac{V_0}{R_3}$
(b) $\frac{2R\boxed{u}}{nT} = \frac{1}{A}$	(d) $\frac{\boxed{a}}{\boxed{b}} = \frac{c}{d} + 1$	

3. Résoudre les équations/inéquations suivantes en factorisant au maximum :

(a) $(x+2)^2 = (x+2)(5x-4)$	(c) $(2x+3)^2 = 49$	(e) $4x^2 - 9 - 2(2x-3) = 0$
(b) $9x^2 - 16 \leq 0$	(d) $5x^2 - 7x > 0$	(f) $(3x-4)(5x+7) < (3x-4)(3x+1)$

4. Résoudre les équations/inéquations suivantes en utilisant le discriminant :

(a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$	(c) $-\frac{3}{4}x^2 - 6x + 4 = -x^2 - 3x - 5$	(e) $-x^2 + 2x - 9 > 0$
(b) $3x^2 + 5x + 4 = 0$	(d) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$	(f) $(x-2)^2 + 3(x-1)\left(x - \frac{5}{3}\right) = 0$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ (en fonction du paramètre m pour les trois dernières) :

a) $\frac{1}{x} > -1$	e) $\frac{1}{\theta} \leq \theta$	i) $\frac{(2x+3)(2-7x)}{x-4} \geq 3$
b) $-1 < \frac{1-u}{1+u} < 1$	f) $a^3 \leq \frac{1}{a}$	j) $x^2 - 2mx + 1 \geq 0$
c) $0 \leq \frac{y-1}{y+1} \leq 1$	g) $\frac{(1+x^2)(5-x)}{1-2x} \leq 0$	k) $\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2}$
d) $x^2 \leq x^3$	h) $\frac{(1+x)(5-x)}{(1-2x)(3-2x)} \geq 0$	l) $\sqrt{2x+m} \geq x+1$

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $ x-2 = 1$	d) $ x-2 = 2 x+1 $	g) $ x+3 - 2 x-1 > 2$
b) $ x-3 \geq 2$	e) $ 2x+1 < 1$	
c) $ x-4 = 2x+10$	f) $ x-1 < x+1 $	h) $ x^2 - x + 1 = 4x - 5$

Exercice 8. Soient $a \in [1, 5]$, $b \in [-2, 3]$ et $c \in [2, 3]$.

1. Majorer : (a) $a+b$	(b) $2a+3b$	(c) $a-b$	(d) $2c-b-1$	(e) $\frac{a+b}{c}$
2. Minorer : (a) $a+b$	(b) $2a+3b$	(c) $a-b$	(d) $2c-b-1$	(e) $\frac{a+b}{c}$

Exercice 9. 1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$, puis $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.

Exercice 10. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $\frac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+2}$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$, $\left| \frac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2} \right| \leq 2$.

Exercice 11. 1. Soit $a \in]1, +\infty[$.

(a) Résoudre l'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

(b) Justifier que $a - \sqrt{a^2 - 1}$ est strictement positif.

(c) Déterminer le signe de $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})$.

(d) En déduire que $a - \sqrt{a^2 - 1} < 1$.

(e) Justifier que $a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$.

2. Soit $y \in]1, +\infty[$. Justifier que l'équation $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement deux solutions réelles, de signes opposés.

Exercice 12. Soient x et y deux nombres réels. Donner une expression explicite en fonction de x, y et $|x - y|$ de $\max(x, y) + \min(x, y)$, $\max(x, y) - \min(x, y)$ puis de $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer une valeur $\varepsilon > 0$ en fonction de a et b telle que les intervalles $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ soient disjoints. On pourra faire un dessin pour s'aider.

Exercice 14. 1. (a) Calculer $\left\lfloor \frac{27}{13} \right\rfloor, \left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor, \lfloor 1,02 \rfloor, \lfloor 2,04 \rfloor, \lfloor 2,04 + 1,02 \rfloor$ et $\lfloor 2,04 \times 1,02 \rfloor$.

(b) Calculer $\left\lfloor -\frac{17}{3} \right\rfloor, \lfloor -1,02 \rfloor, \lfloor -2,04 \rfloor$ et $\lfloor -2,04 - 1,02 \rfloor$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. 1. Montrer que pour tout réel x , $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \leq 1$.

2. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

3. A-t-on : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

4. A-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$?

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 16. 1. (a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour avoir l'égalité $|xy| = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy} \\ \text{(b)} \quad \frac{x+y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{(c)} \quad \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ \text{(d)} \quad 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x} \sqrt{1+y} \end{array} \right) \quad \left(\text{(e)} \quad \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy} \right).$$

3. (a) Montrer que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ pour tous $x, y > 0$.

(b) En déduire que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ pour tous $a, b, c > 0$.

Exercice 17. 1. Lorsque $x \in [0, 1]$, vérifier que $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

2. Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer qu'au moins un des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 18 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). 1. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. En considérant la fonction polynomiale $P(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + xb_k)^2$, démontrer que :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

2. Montrer que pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n$ strictement positifs, on a : $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$.