

Inégalités - Exercices

Exercice 1. 1. Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible (c'est-à-dire en les simplifiant au maximum). Il faut essayer de faire le maximum de simplifications à chaque étape avant de continuer les calculs.

$(a) A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7}$ $(b) B = \frac{7}{8} \times \frac{4}{18} \times \frac{3}{14}$ $(c) C = 3 \times \frac{9}{2}$ $(d) D = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$	$(e) E = \frac{3}{\frac{9}{2}}$ $(f) F = \frac{\frac{2}{9}}{3}$ $(g) G = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$ $(h) H = \left(3 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{8-2}{5+2}$	$(i) I = \frac{3 - \frac{5}{7} + \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{7} - \frac{1}{2}}$ $(j) J = \frac{5 + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{5 - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$
---	---	---

2. Mettre les fractions suivantes au même dénominateur puis simplifier au maximum. Il faut essayer de choisir le dénominateur le plus simple à chaque fois.

$(a) A = \frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x}{x-2}$	$(b) B = \frac{u-1}{u+1} - \frac{u+1}{u-1}$	$(c) C = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{(2x-1)^2}$
---	---	---

Exercice 2. Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression.

$1. A = \frac{5^2 + 4^2}{34 + 28}$ $2. B = 10^1 + 2.10^2 + 3.10^3$ $3. C = \frac{2.10^5 \times (5.10^2 + 2.10^3)}{7.10^1 + 2.10^2}$	$4. D = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ $5. E = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2}$	$6. F = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$ $7. G = (a^3)^2 \times a^{-4}$ $8. H = a^2 b^{-3} (ab)^4$
---	--	---

Exercice 3. 1. Calculer les nombres suivants (les résultats doivent être mis sous la forme $a+b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers) :

$(a) A = 2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$ $(b) B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$	$(c) C = (2\sqrt{2} - 5)(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ $(d) D = (\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$	$(e) E = (3\sqrt{2} - 1)^2 - (2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ $(f) F = (2\sqrt{5} - 3)^2 - (2\sqrt{5} + 3)^2$
---	--	---

2. Écrire les nombres suivants comme des quotients ayant un dénominateur entier :

$(a) A = \sqrt{\frac{1}{24}}$ $(b) B = \frac{3}{\sqrt{2}}$	$(c) C = \frac{5}{2\sqrt{3}}$ $(d) D = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$(e) E = \frac{3}{\sqrt{2} - 1}$ $(f) F = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	$(g) G = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ $(h) H = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$
--	--	---	---

Exercice 4. 1. Développer et réduire les expressions suivantes.

$(a) A(x) = -(x-3) + 3(2x-1) - 2(2x-3)$ $(b) B(x) = x - 2 - 5(x-3) - 3(-3x-4)$ $(c) C(x) = x(x-1)(x-4) - x^2(x-3)$	$(d) D(x) = (x-1)^2(x+2) - (2x+1)^2(x+1)$ $(e) E(x, y) = (3x-2y)^2 - 5(x+3y)^2$
--	---

2. Factoriser les expressions suivantes.

$(a) A(x) = (x+1)(x-3) - 2(x+1)$ $(b) B(x) = (5-2x)(x-1) + x^2 - 1$ $(c) C(x) = (1-2x)^2 - x^2$ $(d) D(x) = 4x^2 - 1 + (2x-1)(x+1)$	$(e) E(x) = 4x^2 - 8x + 4 - (x+7)^2$ $(f) F(x) = x^2 - 4 + x - 2$ $(g) G(x) = (2x-3)^2 - (2x-3)$
---	--

3. (a) Posons $A = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

i. Vérifier que $A^2 = 16$.

ii. Justifier que $\sqrt{9-4\sqrt{5}} \leq \sqrt{9+4\sqrt{5}}$. Quel est le signe de A ?

iii. Que vaut A ?

(b) Reprendre les trois questions précédentes pour montrer que :

i. $B = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{10}$	ii. $C = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$	iii. $D = \sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$
--	---	--

Exercice 5. 1. Résoudre les équations/inéquations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad 13x + 2 - (x - 3) = x - 5 - 3(x + 12) + 4x \\ \text{(b)} \quad 5(3x - 1) - (1 - 2x) \leq 3(5x - 2) \\ \text{(c)} \quad \frac{a-1}{4} - 5 < \frac{2a-3}{2} + \frac{3}{4} \\ \text{(d)} \quad \frac{2x+3}{6} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+2}{3} + 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{(e)} \quad \frac{1-2\alpha}{5} - \frac{\alpha-2}{10} > \frac{5\alpha+2}{2} - \frac{1}{5} \\ \text{(f)} \quad \frac{3x+5}{7} = \frac{5x-2}{5} \\ \text{(g)} \quad \frac{5(t-2)}{8} + \frac{3(1-t)}{5} = \frac{2t+3}{10} \end{array}$$

2. Exprimer l'inconnue entourée en fonction des autres :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{2Ru}{nT} = \frac{1}{\boxed{A}} \\ \text{(b)} \quad \frac{2R\boxed{u}}{nT} = \frac{1}{A} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{(c)} \quad \frac{2Ru}{n\boxed{T}} = \frac{1}{A} \\ \text{(d)} \quad \frac{\boxed{a}}{\boxed{b}} = \frac{c}{d} + 1 \end{array} \right| \text{(e)} \quad U_2 = \frac{\boxed{U_m}}{\frac{R_4}{R_4} + \frac{V_0}{R_3}}$$

3. Résoudre les équations/inéquations suivantes en factorisant au maximum :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad (x+2)^2 = (x+2)(5x-4) \\ \text{(b)} \quad 9x^2 - 16 \leq 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{(c)} \quad (2x+3)^2 = 49 \\ \text{(d)} \quad 5x^2 - 7x > 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{(e)} \quad 4x^2 - 9 - 2(2x-3) = 0 \\ \text{(f)} \quad (3x-4)(5x+7) < (3x-4)(3x+1) \end{array}$$

4. Résoudre les équations/inéquations suivantes en utilisant le discriminant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ \text{(b)} \quad 3x^2 + 5x + 4 = 0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{(c)} \quad -\frac{3}{4}x^2 - 6x + 4 = -x^2 - 3x - 5 \\ \text{(d)} \quad \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{(e)} \quad -x^2 + 2x - 9 > 0 \\ \text{(f)} \quad (x-2)^2 + 3(x-1)\left(x - \frac{5}{3}\right) = 0 \end{array}$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ (en fonction du paramètre m pour les trois dernières) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad \frac{1}{x} > -1 \\ \text{b)} \quad -1 < \frac{1-u}{1+u} < 1 \\ \text{c)} \quad 0 \leq \frac{y-1}{y+1} \leq 1 \\ \text{d)} \quad x^2 \leq x^3 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{e)} \quad \frac{1}{\theta} \leq \theta \\ \text{f)} \quad a^3 \leq \frac{1}{a} \\ \text{g)} \quad \frac{(1+x^2)(5-x)}{1-2x} \leq 0 \\ \text{h)} \quad \frac{(1+x)(5-x)}{(1-2x)(3-2x)} \geq 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{i)} \quad \frac{(2x+3)(2-7x)}{x-4} \geq 3 \\ \text{j)} \quad x^2 - 2mx + 1 \geq 0 \\ \text{k)} \quad \frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2} \\ \text{l)} \quad \sqrt{2x+m} \geq x+1 \end{array}$$

Exercice 7. Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} \quad |x-2| = 1 \\ \text{b)} \quad |x-3| \geq 2 \\ \text{c)} \quad |x-4| = 2x+10 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \text{d)} \quad |x-2| = 2|x+1| \\ \text{e)} \quad |2x+1| < 1 \\ \text{f)} \quad |x-1| < |x+1| \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{g)} \quad |x+3| - 2|x-1| > 2 \\ \text{h)} \quad |x^2 - x + 1| = 4x - 5 \end{array}$$

Exercice 8. Soient $a \in [1, 5]$, $b \in [-2, 3]$ et $c \in [2, 3]$.

1. Majorer :	(a) $a + b$	(b) $2a + 3b$	(c) $a - b$	(d) $2c - b - 1$	(e) $\frac{a+b}{c}$
2. Minorer :	(a) $a + b$	(b) $2a + 3b$	(c) $a - b$	(d) $2c - b - 1$	(e) $\frac{a+b}{c}$

Exercice 9. 1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$, puis $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 10. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)}{\sqrt{x} + 2}$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$, $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} \right| \leq 2$.

Exercice 11. 1. Soit $a \in]1, +\infty[$.

(a) Résoudre l'équation $X^2 - 2aX + 1 = 0$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

(b) Justifier que $a - \sqrt{a^2 - 1}$ est strictement positif.

(c) Déterminer le signe de $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1})$.

(d) En déduire que $a - \sqrt{a^2 - 1} < 1$.

(e) Justifier que $a + \sqrt{a^2 - 1} > 1$.

2. Soit $y \in]1, +\infty[$. Justifier que l'équation $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement deux solutions réelles, de signes opposés.

Exercice 12. Soient x et y deux nombres réels. Donner une expression explicite en fonction de x, y et $|x - y|$ de $\max(x, y) + \min(x, y)$, $\max(x, y) - \min(x, y)$ puis de $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$.

Exercice 13. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer une valeur $\varepsilon > 0$ en fonction de a et b telle que les intervalles $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ et $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ soient disjoints. On pourra faire un dessin pour s'aider.

Exercice 14. 1. (a) Calculer $\left\lfloor \frac{27}{13} \right\rfloor, \left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor, \lfloor 1,02 \rfloor, \lfloor 2,04 \rfloor, \lfloor 2,04 + 1,02 \rfloor$ et $\lfloor 2,04 \times 1,02 \rfloor$.

(b) Calculer $\left\lfloor -\frac{17}{3} \right\rfloor, \lfloor -1,02 \rfloor, \lfloor -2,04 \rfloor$ et $\lfloor -2,04 - 1,02 \rfloor$.

2. Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. 1. Montrer que pour tout réel x , $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor \leq 1$.

2. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

3. A-t-on : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

4. A-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$?

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 16. 1. (a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour avoir l'égalité $|xy| = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2xy} \\ \text{(b)} \quad \frac{x+y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{(c)} \quad \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ \text{(d)} \quad 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x} \sqrt{1+y} \end{array} \right) \quad \left(\text{(e)} \quad \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leq \frac{1}{xy} \right)$$

3. (a) Montrer que : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ pour tous $x, y > 0$.

(b) En déduire que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ pour tous $a, b, c > 0$.

Exercice 17. 1. Lorsque $x \in [0, 1]$, vérifier que $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

2. Soient a, b et c trois réels positifs. Montrer qu'au moins un des trois réels $a(1-b)$, $b(1-c)$ et $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 18 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). 1. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. En considérant la fonction polynomiale $P(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + xb_k)^2$, démontrer que :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

2. Montrer que pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n$ strictement positifs, on a : $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$.

I. Indications - Solutions

Exercice 6 :

- a) $S =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
 b) $S = \mathbb{R}_+^*$
 c) $S = [1, +\infty[$
 d) $S = \{0\} \cup [1, +\infty[$
 e) $S = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$
 f) $S =]-\infty, -1[\cup]0, 1[$
 g) $S = \left] \frac{1}{2}, 5 \right]$
 h) $S = \left[-1, \frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, 5 \right]$
 i) $S = \left[-\infty, -\frac{2\sqrt{22}+5}{7} \right] \cup \left[\frac{2\sqrt{22}-5}{7}, 4 \right]$
 j) Le discriminant vaut $\Delta = 4m^2 - 4 = 4(m^2 - 1)$. Celui-ci est nul lorsque $m = \pm 1$, strictement négatif entre -1 et 1 . Donc lorsque $m \in [-1, 1]$, l'ensemble des x tels

- que $x^2 - 2mx + 1 \geq 0$ est $\mathbb{R}$, et lorsque $m \notin [-1, 1]$, c'est $]-\infty, m - \sqrt{m^2 - 1}[\cup [m + \sqrt{m^2 - 1}, +\infty[$.
 k) $\frac{m}{x-1} \leq \frac{1}{x+2} \iff \frac{(m-1)x + 2m + 1}{(x-1)(x+2)} \leq 0$. Si $m = 1$, on a $\frac{3}{(x-1)(x+2)} \leq 0$ et $S =]-2, 1[$. Si $m = 0$, $S =]-2, +\infty[$. Si $m < 0$, $-\frac{2m+1}{m-1} \in]-2, 1[$ et $S =]-2, -(2m+1)/(m-1)[\cup]1, +\infty[$. Si $0 < m < 1$, $S =]-2, 1[\cup [-(2m+1)/(m-1), +\infty[$. Et si $m > 1$, $S =]-\infty, -(2m+1)/(m-1)[\cup]-2, 1[$.
 l) On doit déjà avoir $2x + m \geq 0$, donc $x \geq -\frac{m}{2}$. Si $x \leq -1$, l'inégalité est toujours vérifiée. Si $x \geq -1$, alors $\sqrt{2x+m} \geq x+1 \Rightarrow 2x+m \geq x^2+2x+1 \Rightarrow x^2 \leq m-1$. Donc si $m < 1$, $S =]-\infty, -1[\cap [m/2, +\infty[= [m/2, -1]$ si $m \leq -2$ et $= \emptyset$ si $m \in]-2, 1[$. Si $m \geq 1$, $S = [m/2, +\infty[\cap [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}] = \emptyset$ si $m \neq 2$ et $\{1\}$ si $m = 2$.

Exercice 7 :

- | | | |
|---|-------------------------|-------------------|
| a) $S = \{1, 3\}$ | d) $S = \{-4, 0\}$ | g) $S =]1/3, 3[$ |
| b) $S =]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$ | e) $S =]-1, 0[$ | |
| c) $S = \{-2\}$ | f) $S = \mathbb{R}_+^*$ | h) $S = \{2, 3\}$ |

Exercice 8 :

- | | | | | |
|------------------------|-----------------------|---------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| 1. (a) $a + b \leq 8$ | (b) $2a + 3b \leq 19$ | (c) $a - b \leq 7$ | (d) $2c - b - 1 \leq 7$ | (e) $\frac{a+b}{c} \leq 4$ |
| 2. (a) $a + b \geq -1$ | (b) $2a + 3b \geq -4$ | (c) $a - b \geq -2$ | (d) $2c - b - 1 \geq 0$ | (e) $\frac{a+b}{c} \geq -\frac{1}{2}$ |

Exercice 9 :

1. On commence par étudier la fonction $x \mapsto \sin(x) - x$. Celle-ci est dérivable de dérivée $x \mapsto \cos(x) - 1$ qui est négative. Donc la fonction est décroissante et vaut 0 en 0. Elle est négative sur $\mathbb{R}_+$. On recommence avec $\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$.
 2. On étudie $x \mapsto e^x - 1 - x$ de dérivée $x \mapsto e^x - 1$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 10 :

1. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-2)$ et $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)$.
 2. Remarquer que $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \leq 1$.

Exercice 11 :

1. (a) C'est une équation du second degré. Le discriminant vaut $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$. Comme $a > 1$, $\Delta > 0$. L'équation a deux solutions $\frac{2a \pm \sqrt{4(a^2-1)}}{2} = a \pm \sqrt{a^2-1}$.
 (b) Comme $a^2 > a^2 - 1$, on a $\sqrt{a^2} > \sqrt{a^2-1}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $a > 0$, $a > \sqrt{a^2-1}$, donc $a - \sqrt{a^2-1} > 0$.
 (c) Comme $a-1 < a+1$, on obtient $\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1} < 0$, donc $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} - \sqrt{a+1}) < 0$.
 (d) En développant l'expression précédente, $a-1 - \sqrt{a^2-1} < 0$, donc $a - \sqrt{a^2-1} < 1$.
 (e) On remarque que $\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}) > 0$, donc $a-1 + \sqrt{a^2-1} > 0$ d'où $a + \sqrt{a^2-1} > 1$.

2. Posons $X = e^x$ de sorte que l'équation se réécrit $X^2 - 2yX + 1 = 0$. D'après les questions précédentes, on a deux solutions $X_1 = y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$, qui sont toutes les deux positives. Donc l'équation de départ a deux solutions $\ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) < 0$ et $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) > 0$.

Exercice 12 : $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$, $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$ (distinguer les cas $x \geq y$ et $x < y$).

Exercice 13 : En faisant un dessin, on s'aperçoit que 2ε doit être plus petit que la distance entre a et b : $\varepsilon < \frac{|a - b|}{2}$. Pour le démontrer, on peut distinguer les cas $a < b$ et $b < a$.

Exercice 14 :

- $\left\lfloor \frac{27}{13} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{1}{13} \right\rfloor = 2$, $\left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor = 3$, $\lfloor 1, 02 \rfloor = 1$, $\lfloor 2, 04 \rfloor = 2$, $\lfloor 2, 04 + 1, 02 \rfloor = 3$ et $\lfloor 2, 04 \times 1, 02 \rfloor = 2$.
 - $\left\lfloor -\frac{17}{3} \right\rfloor = -6$, $\lfloor -1, 02 \rfloor = -2$, $\lfloor -2, 04 \rfloor = -3$ et $\lfloor -2, 04 - 1, 02 \rfloor = -4$.
- Voir Geogebra.

Exercice 15 :

- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc $-2x \leq -2\lfloor x \rfloor < -2x + 2$. De plus, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leq 2x$, donc en sommant, $-1 < \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor < 2$. Comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ est un entier, on a $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 .
- $\lfloor x \rfloor + n$ est un entier et de plus, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, donc $\lfloor x \rfloor + n = \lfloor x + n \rfloor$
- Non, par exemple, si $x = 1,5$ et $y = 1,5$, $\lfloor x + y \rfloor = 3$, mais $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 2$.
- Non, voir l'exemple au-dessus : $x = 1,5$ et $n = 2$.
- $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$ et comme $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x + y$, $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$, et $\lfloor x + y \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $x + y$. Donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \geq \lfloor x + y \rfloor + 1$.

Exercice 16 :

- Partir de $(x + y)^2 \geq 0$ et $(x - y)^2 \geq 0$.
 - Séparer les cas suivant le signe de xy . Si $xy \geq 0$, l'égalité est vraie ssi $(x - y)^2 = 0$ donc $x = y$. Si $xy < 0$, on trouve $x = -y$.
- Comme x et y sont strictement positifs, on peut multiplier les inégalités par x et y sans problème et se ramener à l'inégalité du 1. Pour la 2d, mettre au carré. Pour la 2e, substituer x et y^2 puis x^2 et y dans l'inégalité du 1.
- Montrer $\frac{1}{a} + a \geq 2$ pour tout $a > 0$.
 - Passer la somme à gauche puis développer.

Exercice 17 :

- On vérifie en faisant une étude de fonction, ou en mettant la fonction sous forme canonique.
- Que se passe-t-il si un des trois réels est ≥ 1 ?
Lorsque $a, b, c \in [0, 1]$, donner un encadrement de $a(1 - b)b(1 - c)c(1 - a)$ et raisonner par l'absurde.

Exercice 18 :

- On suppose que le b_k ne sont pas tous nuls. P est une fonction polynômiale de degré 2. De plus, elle a au maximum 1 racine. Donc son discriminant est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité voulue.
- On utilise $a_k = \sqrt{x_k}$ et $b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$.