

## Contrôle de cours 2 - Trigonométrie et complexes - Sujet A

### Mardi 15 septembre 2026

#### Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Deux angles ont le même cosinus si et seulement si ils sont égaux ou opposés, modulo  $2\pi$ . Donc l'équation est équivalente à :  $2x - \frac{\pi}{6} \equiv x + \frac{\pi}{4} [2\pi]$  ou  $2x - \frac{\pi}{6} \equiv -\left(x + \frac{\pi}{4}\right) [2\pi]$ .

La première donne  $x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$ , la seconde  $x \equiv -\frac{\pi}{36} [2\pi/3]$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv -\frac{\pi}{36} [2\pi/3]\right\}$ . □

#### Question 2 (2 pts)

Résoudre l'inéquation  $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . On pourra faire un dessin.

En s'aidant du cercle trigonométrique, l'inéquation est équivalente à :  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que  $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ . □

#### Question 3 (1 pt)

Écrire sous forme algébrique :  $z_1 = \frac{2+3i}{4-i} = \frac{(2+3i)(4+i)}{|4+i|^2} = \frac{5+14i}{17}$  □

#### Question 4 (3 pts)

- Énoncer l'inégalité triangulaire pour les complexes :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

- Rappeler la définition d'un argument d'un nombre complexe : Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe non nul et  $M$  son point image dans le plan complexe. Un argument de  $z$  est une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{OM})$ .
- Énoncer les formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

#### Question 5 (3 pts)

- Soit  $p, q \in \mathbb{R}$ . Factoriser par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}} \left( \frac{e^{ip}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} + \frac{e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} \right) \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \left( e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}. \end{aligned}$$

2. En déduire la formule de factorisation pour

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

en prenant les parties réelles dans la factorisation par l'angle moitié.

□

### Question 6 (2 pts)

Pour chaque affirmation, cocher la case correspondante (aucune justification n'est demandée).

1. Pour tout réel  $x$ ,  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ . ■ Vrai    □ Faux
2. Pour tous complexes  $z, z'$ ,  $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z')$ . □ Vrai    ■ Faux
3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Un argument de  $e^{i\theta}$  est  $\theta + 2\pi$ . ■ Vrai    □ Faux
4.  $\cos x = \cos a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = a + 2k\pi$ . □ Vrai    ■ Faux

□

## Contrôle de cours 2 - Trigonométrie et complexes - Sujet B

### Mardi 15 septembre 2026

#### Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation :

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Deux angles ont le même cosinus si et seulement si ils sont soit égaux, soit opposés, modulo  $2\pi$ . Donc l'équation est équivalente à :  $2x - \frac{\pi}{4} \equiv x + \frac{\pi}{6} [2\pi]$  ou  $2x - \frac{\pi}{4} \equiv -\left(x + \frac{\pi}{6}\right) [2\pi]$ .

La première donne  $x \equiv \frac{5\pi}{12} [\pi]$ , la seconde  $x \equiv \frac{\pi}{36} [2\pi/3]$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv \frac{\pi}{36} [2\pi/3]\right\}$ . □

#### Question 2 (2 pts)

Résoudre l'inéquation  $\sin x \leq \frac{1}{2}$ . On pourra faire un dessin.

En s'aidant du cercle trigonométrique, l'inéquation est équivalente à :  $\exists k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ . □

#### Question 3 (1 pt)

Écrire sous forme algébrique :  $z_1 = \frac{2-3i}{4+i} = \frac{(2-3i)(4-i)}{|4+i|^2} = \frac{5-14i}{17}$  □

#### Question 4 (3 pts)

- Énoncer l'inégalité triangulaire pour les complexes :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

- Rappeler la définition d'un argument d'un nombre complexe : Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe non nul et  $M$  son point image dans le plan complexe. Un argument de  $z$  est une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{OM})$ .
- Énoncer les formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

#### Question 5 (3 pts)

- Soit  $p, q \in \mathbb{R}$ . Factoriser par l'angle moitié :

$$\begin{aligned} e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}} \left( \frac{e^{ip}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} + \frac{e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} \right) \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \left( e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}. \end{aligned}$$

2. En déduire la formule de factorisation pour

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

en prenant les parties imaginaires dans la factorisation par l'angle moitié.

□

### Question 6 (2 pts)

Pour chaque affirmation, cocher la case correspondante (aucune justification n'est demandée).

- |                                                                                                          |                                          |                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. Pour tout réel $x$ , $\sin(x + \pi) = \sin(x)$ .                                                      | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| 2. Pour tous complexes $z, z'$ , $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(z')$ . | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| 3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ . Le module de $e^{i\theta}$ vaut 1.                                     | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |
| 4. $\sin x = \sin a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = a + 2k\pi$ .                                  | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |

□