

Devoir Surveillé 01

(durée : 2 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1. Les neuf questions suivantes sont indépendantes.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la partie entière de x .
 (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
 (c) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. A-t-on $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? Justifier.
2. Énoncer puis démontrer l'inégalité triangulaire.
3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$.
4. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions de l'union et de l'intersection de I et J .
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la valeur absolue de x .
6. Simplifier au maximum les fractions suivantes (où x et y sont des réels non nuls) :

$$A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{5}{3} - \frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad B = \frac{(x^2 y)^{-1} (x y^{-2})^3}{(x^{-1} y)^2}.$$

7. Dans chaque cas, comparer les deux nombres en justifiant :

(a) $\frac{17}{5}$ et $\frac{24}{7}$

(b) $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$.

8. Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^3 \geq x$

(b) $\frac{3}{x} < x$

(c) $|x + 1| \geq 2$

(d) $0 < \frac{2-x}{2+x} < 1$.

9. En remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. Pour tout réel m , on considère l'équation $(E_m) : (m+3)x^2 - 2(m-2)x + (m-5) = 0$.Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (E_m) en fonction de m .*On fera attention au degré de (E_m) !***Exercice 3.** 1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2. En déduire que pour tout x, y et z réels strictement positifs, de somme s , on a :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 - s.$$

Exercice 4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que : $n \lfloor x \rfloor \leq nx \leq n \lfloor x \rfloor + n$.

2. En déduire que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 5. 1. Résoudre l'inéquation $\sin(2x) > 0$.

2. En utilisant les formules d'addition, démontrer que pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2(a) - \sin^2(b).$$

3. En utilisant les deux premières questions, résoudre l'inéquation trigonométrique

$$\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 0.$$

Correction du Devoir Surveillé 01

Correction de l'exercice 1 :

- La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .
 - Par définition, $\lfloor x \rfloor \leq x$. Puis, comme $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier relatif strictement supérieur à $\lfloor x \rfloor$, il n'est pas inférieur ou égal à x . Donc $x < \lfloor x \rfloor + 1$.
 - Non, par exemple, avec $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 0$ mais $\lfloor x + y \rfloor = 1$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. D'une part, $|x + y|^2 = |(x + y)^2| = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Or, $xy \leq |xy|$, donc $|x + y|^2 \leq x^2 + y^2 + 2|xy| = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- Pour tout $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $|x| \geq 1 \geq |\sin(x)|$, donc l'inégalité est vraie sur cet ensemble.
 - Posons $f : x \mapsto x - \sin(x)$ qui est une fonction dérivable sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$. Donc f est croissante sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$. Ainsi, $\forall x \in [0, 1]$, $\sin(x) \leq x$. Or, pour tout $x \in [0, 1]$, $x \in [0, \pi]$, donc $\sin(x) \geq 0$.
Enfin, pour tout $x \in [0, 1]$, $|\sin(x)| = \sin(x) \leq x = |x|$.
 - Soit $x \in [-1, 0]$. Alors $-x \in [0, 1]$, donc $|\sin(-x)| \leq |-x|$ et par imparité du sinus, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
- $I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ ou } x \in J\}$ et $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ et } x \in J\}$.
- Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et si $x \leq 0$, $|x| = -x$.
- $A = \frac{\frac{9}{12} + \frac{2}{12}}{\frac{10}{6} - \frac{3}{6}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{6}} = \frac{11}{14}$, donc $A = \frac{11}{14}$ et $B = x^{-2}y^{-1}x^3y^{-6}x^2y^{-2}$, donc $B = x^3y^{-9}$.
- $\frac{17}{5} - \frac{24}{7} = \frac{119 - 120}{35} < 0$, donc $\frac{17}{5} < \frac{24}{7}$.
 $(2\sqrt{7})^2 = 28$ et $(3\sqrt{3})^2 = 27$, donc $3\sqrt{3} < 2\sqrt{7}$.
- $x^3 \geq x \iff x(x^2 - 1) \geq 0$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x(x^2-1)$	$-$	0	$+$	0	$-z$	$+$

L'ensemble des solutions est donc $[-1, 0] \cup [1, +\infty[$.

- $\frac{3}{x} < x \iff \frac{3 - x^2}{x} < 0 \iff \frac{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)}{x} < 0$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\sqrt{3}-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\sqrt{3}+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{x}$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions est $] -\sqrt{3}, 0[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Il vérifie $|x + 1| \geq 2$ ssi sa distance à -1 est supérieure ou égale à 2. Donc l'ensemble des solutions est $] -\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.
- On fait un tableau de signes pour $\frac{2 - x}{2 + x}$:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2-x$	+	+	0	-
$2+x$	-	0	+	+
$\frac{2-x}{2+x}$	-	+	0	-

L'ensemble des solutions de $\frac{2-x}{2+x} > 0$ est $] -2, 2[$.

- $\frac{2-x}{2+x} < 1 \iff \frac{2-x}{2+x} - 1 < 0 \iff \frac{-2x}{2+x} < 0$ et on fait un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$-2x$	+	+	0	-
$2+x$	-	0	+	+
$\frac{-2x}{2+x}$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de $\frac{2-x}{2+x} < 1$ est $] -\infty, -2[\cup] 0, +\infty[$.

L'ensemble des solutions de $0 < \frac{2-x}{2+x} < 1$ est $] -2, 2[\cap (] -\infty, -2[\cup] 0, +\infty[) =] 0, 2[$.

9. On applique les formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

d'où $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2},\end{aligned}$$

d'où $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Correction de l'exercice 2 :

ATTENTION : l'équation n'est pas toujours de degré 2! Si $m = -3$, (E_{-3}) est une équation de degré 1, elle a donc une seule solution réelle.

Si $m \neq -3$, on a bien une équation de degré 2. On calcule le discriminant : $\Delta = 4(m-2)^2 - 4(m+3)(m-5) = 4m^2 - 16m + 16 - 4(m^2 - 2m - 15) = -8m + 76$. On étudie le signe de Δ selon la valeur de m :

m	$-\infty$	$19/2$	$+\infty$
Δ	+	0	-

On distingue les cas :

- si $m = -3$, l'équation (E_m) a une seule solution réelle;
- si $m \in \left] -\infty, \frac{19}{2} \right[\setminus \{-3\}$, l'équation (E_m) a deux solutions réelles;
- si $m = \frac{19}{2}$, l'équation (E_m) a une seule solution réelle;
- si $m \in \left] \frac{19}{2}, +\infty \right[$, l'équation (E_m) n'a pas de solution réelle.

Correction de l'exercice 3 :

1. On peut procéder de plusieurs façons. La façon que je préfère, est de modifier l'inégalité au brouillon pour voir qu'elle est équivalente à $x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Pour la démonstration propre, on procède ainsi.
Soit $x > 0$. Comme $(x-1)^2 \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &\geq 0 \\ \text{donc } x^2 + 1 &\geq 2x \\ \text{et } \frac{x^2 + 1}{x} &\geq 2 \quad \text{car } x > 0 \\ \text{d'où } x + \frac{1}{x} &\geq 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2}.$

2. Comme x, y et z sont strictement positifs, l'inégalité précédente s'applique :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{et} \quad y + \frac{1}{y} \geq 2 \quad \text{et} \quad z + \frac{1}{z} \geq 2.$$

En ajoutant les trois inégalités, on a :

$$x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6$$

Comme $s = x + y + z$, on obtient bien :

$$\boxed{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 6 - s}$$

Correction de l'exercice 4 :

1. D'après la définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. En multipliant par n (qui est positif), on obtient :

$$\boxed{n \lfloor x \rfloor \leq nx < n \lfloor x \rfloor + n}$$

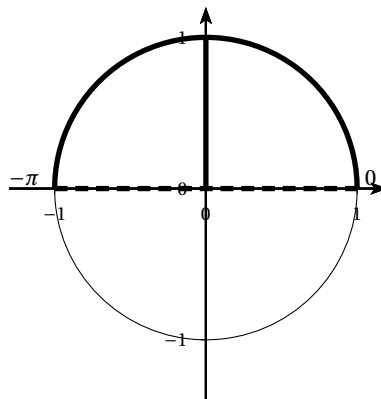
2. D'après l'encadrement précédent, et comme $n \lfloor x \rfloor$ est un entier, on a :

$$n \lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor < n \lfloor x \rfloor + n$$

En divisant par n (qui est strictement positif) :

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$ sont deux entiers successifs, on a $\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}.$

Correction de l'exercice 5 :

1.

En s'aidant du cercle trigonométrique, $\sin(2x) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} 0 + 2k\pi &< 2x < \pi + 2k\pi \\ \iff k\pi &< x < \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[}.$

2. Pour tous réels x et y :

$$\begin{aligned}
 \cos(a+b)\cos(a-b) &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)) \text{ (formules d'addition)} \\
 &= \cos^2(a)\cos^2(b) - \sin^2(a)\sin^2(b) \\
 &= \cos^2(a)(1 - \sin^2(b)) - \sin^2(b)(1 - \cos^2(a)) \text{ (on utilise ici } \cos^2 x + \sin^2 x = 1) \\
 &= \cos^2(a) - \cancel{\cos^2(a)\sin^2(b)} - \sin^2(b) + \cancel{\sin^2(b)\cos^2(a)} \\
 &= \cos^2(a) - \sin^2(b)
 \end{aligned}$$

3. En utilisant la formule démontrée dans la question précédente avec $a = x - \frac{\pi}{3}$ et $b = x - \frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}
 &\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > 0 \\
 \Leftrightarrow &\cos\left(x - \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3} - x + \frac{\pi}{6}\right) > 0 \\
 \Leftrightarrow &\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) > 0 \\
 \Leftrightarrow &\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \\
 \Leftrightarrow &\sin(2x) > 0
 \end{aligned}$$

Or, on a résolu cette inéquation dans la première question. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.