

Trigonométrie et nombres complexes - Exercices

I. Trigonométrie

Exercice 1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ (sous réserve de définition) pour les réels x suivants :

$$1. x = \frac{5\pi}{6} \quad 2. x = \frac{27\pi}{2} \quad 3. x = \frac{7\pi}{4} \quad 4. x = -\frac{59\pi}{6} \quad 5. x = \frac{17\pi}{4} \quad 6. x = \frac{29\pi}{3}$$

Exercice 2. Calculer les cosinus, sinus et tangentes en a , b , $a + b$ et $a - b$ lorsque cela est possible :

$$1. \begin{cases} \sin a = \frac{2}{5}, & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{3}{5}, & \frac{\pi}{2} < b < \pi \end{cases} \quad \left| \quad 2. \begin{cases} \cos a = -\frac{1}{2}, & \frac{\pi}{2} < a < \pi \\ \sin b = -\frac{1}{3}, & \pi < b < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \left| \quad 3. \begin{cases} \cos a = \frac{5}{13}, & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \sin b = \frac{12}{13}, & 0 < b < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 3. Soit x un réel tel que les expressions suivantes sont bien définies. Simplifier ces expressions :

$$1. A = \sin(x + \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right); \quad 2. B = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad 3. C = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$4. D = \cos x + \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Exercice 4. 1. À l'aide des formules d'addition, déterminer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{12}$.

2. En déduire les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des angles $\frac{3\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 5. 1. Déterminer les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente de $\frac{\pi}{8}$.

2. En déduire les valeurs exactes des cosinus, sinus et tangente des angles $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{-5\pi}{8}$.

Exercice 6. Résoudre l'équation $\cos 2x + \cos x = 0$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}; \quad b) \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right); \quad c) \tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right); \quad d) \tan(x) \tan(2x) = 1$$

Exercice 8. 1. Démontrer que pour tout réel x , $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin(x + \varphi)$, où φ est un réel dont on précisera la valeur.

2. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation : $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \cos x - \sin x = 1; \quad b) \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -\sqrt{2}; \quad c) (\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} - 1 = 0$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) \cos x \leq \frac{1}{2}; \quad b) |\sin x| \leq \frac{1}{2}; \quad c) -1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}; \quad d) \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$$

II. Nombres complexes

Exercice 11. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lll} a) z = (3 + 2i)^2(2 - i) & h) z = i + \frac{1}{i} & l) z = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^3} \\ b) z = (1 + i\sqrt{3})^4 & i) z = \frac{2 + i}{1 - i} & m) z = \frac{1}{a + a^2 i}, a \in \mathbb{R}^* \\ c) z = (1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i) & j) z = \frac{1}{(1 - i)(2 - i)} & n) z = \frac{1}{1 - i} + \frac{2}{1 - 2i} + \frac{3}{1 - 3i} \\ d) z = (1 + i)(2 - i)(3 + i)(4 - i) & k) z = \frac{(-3 + 4i)(5 - 4i)}{15 - 10i} & o) z = 1 + \frac{i}{2 + \frac{i}{3}} \\ e) z = (1 + i)(1 + 2i)^2(1 + 3i)^3 & & \\ f) z = \left(\frac{3}{4} - 2i\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{2}\right) & & \\ g) z = (2 + i)^3 + (1 - 2i)^3 & & \end{array}$$

Exercice 12. 1. Calculer $(1 + i)^n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5.

2. En déduire la valeur de $(1 + i)^n$ en fonction de n .

Exercice 13. 1. Soient : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = z_1 \times z_2$. Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$ (cf. exercice 4)

2. a étant un nombre réel, exprimer les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a) $z = \cos a + i \sin a$	d) $z = \sin a + i \cos a$	g) $z = e^{ia} + 1$
b) $z = \cos a - i \sin a$	e) $z = -\cos a - i \sin a$	h) $z = e^{ia} - 1$
c) $z = -\sin a + i \cos a$	f) $z = -\sin a - i \cos a$	

3. Déterminer le module et un argument de : $z_1 = (1 + i)^n + (1 - i)^n$ et de $z_2 = (1 + i \tan \alpha)^n$.

Exercice 14. 1. Écrire sous forme exponentielle :

a) $1 + i$	b) $1 - i$	c) $i - 1$	d) $\sqrt{3} + i$
------------	------------	------------	-------------------

2. En déduire les parties réelles et imaginaires de :

a) $\frac{(1 - i)^5}{(1 + i)^4}$	b) $(1 + i)^{44}$	c) $\left(\frac{-4}{\sqrt{3} + i}\right)^{19}$
----------------------------------	-------------------	--

Exercice 15. Soit z un nombre complexe de module 1. Simplifier $|z + 1|^2 + |z - 1|^2$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z + 2\bar{z} = 5 + 3i$	2. $3\bar{z} = 2z + i$	3. $* \bar{z}^2 + 2 z ^2 - 3 = 0$
----------------------------	------------------------	-----------------------------------

Exercice 17. * On note $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Soient a, b et c trois nombres réels et les trois nombres complexes :

$$z_1 = a + b + c; z_2 = a + bj + cj^2; z_3 = a + bj^2 + cj.$$

- Déterminer le module et un argument de j .
- Calculer j^3 et $j + j^2$.
- Déterminer la valeur de $s_k = 1 + j^k + j^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (a) Préciser les parties réelles et imaginaires de z_1, z_2 et z_3 .
(b) Démontrer que ces nombres complexes sont tous réels si et seulement si $b = c$.
- (a) À quelle condition ces complexes sont-ils égaux à un même réel? Déterminer en particulier a, b et c de sorte que $z_1 = z_2 = z_3 = 1$.
(b) Déterminer les valeurs de a, b et c pour lesquelles $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\}$.

Exercice 18. 1. Factoriser $e^{ip} + e^{iq}$ et $e^{ip} - e^{iq}$.

2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 avec $z_1 z_2 \neq -1$. Vérifier que $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ est réel, puis l'exprimer en fonction des arguments de z_1 et z_2 .

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer, lorsque cela est possible, le module et un argument de $z = e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

Exercice 19. 1. Justifier qu'il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $4 - 3i = 5e^{i\theta_0}$, puis donner une valeur approchée au millièmes de θ_0 avec la calculatrice.

2. Écrire $4 \cos t - 3 \sin t$ sous la forme $A \cos(t + \varphi)$ puis sous la forme $B \sin(t + \psi)$.

Exercice 20. Soit A, B, C, D quatre points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D . On note I, J, K et L les milieux de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

Calculer les affixes des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{LK}$. Que dire de $IJKL$?

Exercice 21. On rappelle que l'isobarycentre d'un triangle ABC est le point G vérifiant $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Soient $A(2 - 3i), B(2 - i)$ et $C(5 + 5i)$. Quel est l'abscisse de l'isobarycentre du triangle ABC ?

III. Indications - Solutions

Exercice 1 :

$$1. x = \frac{5\pi}{6}, \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x = \frac{1}{2}, \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2. x = \frac{27\pi}{2}, \cos x = 0, \sin x = -1$$

$$3. x = \frac{7\pi}{4}, \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x = -1$$

$$4. x = -\frac{59\pi}{6}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x = \frac{1}{2}, \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5. x = \frac{17\pi}{4}, \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan x = 1$$

$$6. x = \frac{29\pi}{3}, \cos x = \frac{1}{2}, \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan x = -\sqrt{3}$$

Exercice 2 :

$$1. \cos a = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan a = \frac{2}{\sqrt{21}}, \cos b = -\frac{4}{5}, \tan b = -\frac{3}{4};$$

$$2. \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan a = -\sqrt{3}, \cos b = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan b = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$3. \sin a = \frac{12}{13}, \tan a = \frac{12}{5}, \cos b = \frac{12}{13}, \tan b = \frac{5}{12}.$$

Exercice 3 : 1. $A = 0$;

2. $B = 0$;

3. $C = 0$;

4. $D = 0$.

Exercice 4 :

1. Remarquer que $2\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, puis utiliser les formules de duplication : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

2. Utiliser les angles associés à $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5 : S'inspirer de l'exercice 4.

Exercice 6 : $S = \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 7 :

$$a) S = \left\{k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$b) S = \left\{\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$c) S = \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$d) S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 8 :

1. Utiliser la formule d'addition, puis identifier les deux côtés de l'égalité. On trouve $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$2. S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Exercice 9 : On pourra penser à utiliser les formules d'addition pour transformer les équations avant de les résoudre.

$$a) S = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$b) S = \left\{\frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$c) S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \text{ on pourra utiliser les valeurs de } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \text{ obtenues au 4.}$$

Exercice 10 :

$$a) S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]; \quad b) S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]; \quad c) S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{17\pi}{24} + k\pi\right];$$

$$d) S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

Exercice 11 :

$$a) z = (3 + 2i)^2(2 - i) = 22 + 19i$$

$$b) z = (1 + i\sqrt{3})^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

$$c) z = (1 - i)(1 - 2i)(1 - 3i) = -10$$

$$d) z = (1 + i)(2 - i)(3 + i)(4 - i) = 38 + 16i$$

$$e) z = (1 + i)(1 + 2i)^2(1 + 3i)^3 = 200 + 100i$$

$$\begin{array}{l} \text{f) } z = \left(\frac{3}{4} - 2i\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{73i}{24} \\ \text{g) } z = (2+i)^3 + (1-2i)^3 = -9 + 13i \\ \text{h) } z = i + \frac{1}{i} = 0 \\ \text{i) } z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{j) } z = \frac{1}{(1-i)(2-i)} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \\ \text{k) } z = \frac{(-3+4i)(5-4i)}{15-10i} = -\frac{61}{65} + \frac{98}{65}i \\ \text{l) } z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ \text{m) } z = \frac{1}{a+a^2i} = \frac{1}{1+a} - \frac{a}{1+a}i \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{n) } z = \frac{1}{1-i} + \frac{2}{1-2i} + \frac{3}{1-3i} = \frac{6}{5} + \frac{11}{5}i \\ \text{o) } z = 1 + \frac{i}{2+\frac{i}{3}} = \frac{40}{37} + \frac{18}{37}i \end{array}$$

Exercice 12 :

- $(1+i)^0 = 1, (1+i)^1 = 1+i, (1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4, (1+i)^5 = -4-4i.$
- Remarquer qu'on passe de $(1+i)^n$ à $(1+i)^{n+4}$ en multipliant par -4 . On distingue selon le reste de la division de n par 4. Par exemple, si $n = 4k$, $(1+i)^n = (-4)^k = (-4)^{\frac{n}{4}}$. On fait de même pour $n = 4k+1, n = 4k+2$ et $n = 4k+3$.

Exercice 13 :

- $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = 2e^{\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$. Donc $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
- | | | |
|--|---|---|
| a) $\cos a + i \sin a = e^{ia}$ | d) $\sin a + i \cos a = e^{i(\frac{\pi}{2}-a)}$ | g) $e^{ia} + 1 = 2 \cos \frac{a}{2} e^{i\frac{a}{2}}$ |
| b) $\cos a - i \sin a = e^{-ia}$ | e) $-\cos a - i \sin a = e^{i(a+\pi)}$ | h) $e^{ia} - 1 = 2 \sin \frac{a}{2} e^{i(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2})}$ |
| c) $-\sin a + i \cos a = e^{i(a+\frac{\pi}{2})}$ | f) $-\sin a - i \cos a = e^{-i(a+\frac{\pi}{2})}$ | |
- $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ puis formule d'Euler : $z_1 = (2\sqrt{2})^n \cos(\pi/4)$. $(1+i \tan \alpha)^n = \frac{1}{\cos^n \alpha} e^{in\alpha}$.

Exercice 14 :

- | | | | |
|---------------------------------------|--|--|---------------------------------------|
| a) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ | b) $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ | c) $i-1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ | d) $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ |
|---------------------------------------|--|--|---------------------------------------|
- | | | |
|------------------------------------|---|---------|
| a) $\frac{(1-i)^5}{(1+i)^4} = 1-i$ | b) $(1+i)^{44} = -4194304$ | 262144i |
| | c) $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^{19} = 262144\sqrt{3} -$ | |

Exercice 15 : $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$. On peut répondre à cet exercice sans faire de calcul!

Exercice 16 :

- $z = \frac{5}{3} - 3i$
- $z = -\frac{1}{5}i$
- On a $\bar{z}^2 = 3 - 2|z|^2 \in \mathbb{R}$. Si $3 - 2|z|^2 \geq 0$, alors $\bar{z} \in \mathbb{R}$, donc $z^2 = \bar{z}^2 = |z|^2$, l'équation devient $3z^2 - 3 = 0 \iff z = \pm 1$. Si $3 - 2|z|^2 < 0$, alors $\bar{z} \in i\mathbb{R}$, donc $z^2 = \bar{z}^2 = -|z|^2$, l'équation devient $-z^2 - 3 = 0$ et $z = \pm\sqrt{3}$. Donc $S = \{\pm\sqrt{3}, \pm 1\}$.

Exercice 17 :

- $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- $j^3 = 1$ et $j + j^2 = -1$.
- $s_{3l} = 3, s_{3l+1} = s_{3l+2} = 0$.
- $z_1 = a + b + c, z_2 = a - \frac{b+c}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)i$ et $z_3 = a - \frac{b+c}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)i$.
 - $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R} \iff b-c=0$ et $c-b=0 \iff b=c$.
- On doit avoir $b=c$ et $a+b+c = a - \frac{b+c}{2} \iff a+2b = a-b \iff b=0$. Donc $z_1 = z_2 = z_3 = 1 \iff a=1$ et $b=c=0$.
 - Si $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1\}$ en particulier, $b=c$ et $z_2 = z_3 = a-b$. Si $z_2 = z_3 = 0$, on trouve $z_1 = 3a$, donc soit $a=0=b=c$, soit $a=\frac{1}{3}=b=c$. Si $z_2 = z_3 = 1$, soit $z_1 = 1$, auquel cas, $a=1$ et $b=c=0$, soit $z_1 = 0$, auquel cas, $a=\frac{2}{3}$ et $b=-\frac{1}{3}=c$.

Exercice 18 :

- $e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$ et $e^{ip} - e^{iq} = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$.
- $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}}{\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$.

3. $\Rightarrow$: on pose $\frac{1+z}{1-z} = ib$, on résout en z puis on calcule le module. $\Leftarrow$: on pose $z = e^{i\theta}$ puis on factorise par l'angle moitié.
4. On factorise par l'angle moitié : $z = e^{i3\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = \cos(\theta/2)e^{i3\theta/2}$. On discute :
- $\cos(\theta/2) = 0 \iff \theta \equiv \pi [2\pi]$, et dans ce cas $z = 0$, donc n'a pas d'argument;
 - $\cos(\theta/2) > 0 \iff \theta/2 \in]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$, et dans ce cas, $|z| = \cos(\theta/2)$ et $\arg(z) \equiv 3\theta/2 [2\pi]$;
 - $\cos(\theta/2) < 0 \iff \theta/2 \in]\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi[$, et dans ce cas, $|z| = -\cos(\theta/2)$ et $\arg(z) \equiv 3\theta/2 + \pi [2\pi]$.

Exercice 19 :

1. $|4 - 3i| = 5$, $\theta_0 \approx -0,644 \text{ rad}$.
2. $4 \cos t - 3 \sin t = 5 \cos(t - \theta_0) = -5 \sin\left(t - \frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$.

Exercice 20 : I est d'affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$, J est d'affixe $\frac{z_B + z_C}{2}$, K est d'affixe $\frac{z_C + z_D}{2}$ et L est d'affixe $\frac{z_D + z_A}{2}$. Ainsi $\vec{IJ}$ est d'affixe $\frac{z_B + z_C}{2} - \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_C - z_A}{2}$ et $\vec{LK}$ est d'affixe $\frac{z_C + z_D}{2} - \frac{z_D + z_A}{2} = \frac{z_C - z_A}{2}$. On conclut que $\vec{IJ} = \vec{LK}$ et donc que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 21 : En passant en complexe, on trouve $z_G = 3 + \frac{1}{3}i$.