

## Outils pour l'étude de fonctions - Exercices

### I. Propriétés générales des fonctions

- Exercice I.1.** 1. Tracer le graphe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  sur  $[0, 4]$ . Tracer ensuite les graphes des fonctions  $f(x) + 2$ ,  $f(x + 2)$ ,  $f(2x)$  et  $2f(x)$ .
2. Tracer sur  $[-3, 5]$  le graphe de la fonction  $f$  qui est 1-périodique et telle que :  $\forall x \in [-1/2, 1/2], f(x) = |x|$ .
3. Tracer sur  $[-3, 5]$  le graphe de la fonction  $g$  qui est 2-périodique et telle que :  $\forall x \in [-1, 1], g(x) = x^2$ .
4. Tracer sur  $[-3, 3]$  le graphe de la fonction  $h$  qui est 1-périodique et telle que :  $\forall x \in [0, 1[, h(x) = x$ .

- Exercice I.2.** 1. Pour chaque couple de fonctions  $f$  et  $g$ , déterminer les ensembles de définition de  $f \circ g$  et  $g \circ f$  et les calculer :

(a)  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = x^2$ ;      (b)  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  et  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;      (c)  $f(x) = x^2 - 2$  et  $g(x) = \ln(x)$

2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que  $h = u \circ v$  :

(a)  $h(x) = \sqrt{3x - 1}$ ;      (b)  $h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ;      (c)  $h(x) = \frac{1}{x + 7}$ ;      (d)  $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ ;      (e)  $h(x) = e^{\cos x}$

- Exercice I.3.** Les fonctions suivantes sont-elles majorées? minorées? bornées?

1.  $f : x \mapsto \sin(x) e^x$

2.  $g : x \mapsto \frac{2 \cos(x) + 2 \sin(x)}{1 + e^x}$ .

- Exercice I.4.** Soient  $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors  $f + g$  est aussi monotone (resp. strictement monotone) de même monotonie.
- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont monotones de même monotonie et positives alors  $fg$  est aussi monotone de même monotonie. Donner un contre-exemple lorsque les deux fonctions ne sont pas positives.
- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors  $f \circ g$  est croissante (resp. strictement croissante).
- Montrer que si  $f$  et  $g$  sont monotones (resp. strictement monotones) de monotonies contraires alors  $f \circ g$  est décroissante (resp. strictement décroissante).

- Exercice I.5.** 1. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont bornées, alors  $f + g$  et  $fg$  sont bornées.

2. Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions majorées,  $fg$  est-elle majorée?

- Exercice I.6.** 1. Soit  $f$  une fonction paire sur  $\mathbb{R}$  qui est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ .

2. Soit  $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $g : t \mapsto \sin(\omega t)$  est périodique et déterminer sa période en fonction de  $\omega$ .

- Exercice I.7.** Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur  $\mathbb{R}$  est constante.

### II. Calculs de dérivées

- Exercice II.1.** Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité :

|                                                                                                                         |                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f_1(x) = x^e$<br>2. $f_2(t) = (at - 1) \sin(7t + 2)$<br>3. $f_3(u) = \frac{u}{u^2 - \tau^2}$<br>4. $f_4(t) = \pi^t$ | 5. $f_5(x) = \sin^4 x$<br>6. $f_6(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 4}$<br>7. $f_7(t) = \ln((2t + 1)(t^2 + 1))$<br>8. $f_8(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 1}$ | 9. $f_9(t) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x^4}\right)$<br>10. $f_{10}(x) = \tan(\cos(x))$<br>11. $f_{11}(x) =  x + 1 ^{\frac{1}{3}}$<br>12. $f_{12}(x) = x e^{\frac{1}{\ln x}}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- Exercice II.2.** 1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  par  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$ , où  $a, b$  et  $c$  sont 3 réels. Déterminer  $a, b$  et  $c$  pour que  $\mathcal{C}_f$  ait les propriétés suivantes :

- $\mathcal{C}_f$  passe par le point  $A(0, 5)$ ;
- la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  est parallèle à l'axe des abscisses;
- la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur  $-3$ .

2. Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on considère les fonctions  $g_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$ .

- (a) Montrer que les tangentes en 0 aux courbes des fonctions  $g_\lambda$  sont parallèles entre elles.
- (b) Démontrer que les tangentes en 1 aux courbes des fonctions  $g_\lambda$  sont concourantes.

### III. Limites

**Exercice III.1.** Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} \quad \left| \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \left| \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \left| \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x} \right. \right.$$

**Exercice III.2.** Pour chaque fonction  $f$ , vérifier que la droite d'équation donnée est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $\pm\infty$  :

1.  $f(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{x - 2}$ ,  $y = -x + 4$  en  $\pm\infty$
2.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ ,  $y = x + 2$  en  $+\infty$
3.  $f(x) = 3x + 1 + \frac{\sin(5x)}{2x}$ ,  $y = 3x + 1$  en  $+\infty$

### IV. Bijections

**Exercice IV.1.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

1. Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}^*$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
2. En déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de  $f$ .

**Exercice IV.2.** Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble à préciser, et écrire les fonctions réciproques :

$$\begin{array}{l} 1. f_1(x) = 3x - 5 \\ 2. f_2(x) = \sqrt{3} - x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. f_3(x) = x^2 - 1 \text{ sur } ]-\infty, 0] \\ 4. f_4(x) = \frac{1}{3x - 2} \end{array} \quad \left| \quad 5. f_5(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1} \right.$$

**Exercice IV.3.** Soit  $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ .

1. Justifier que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Calculer  $f^{-1}(1)$  et  $f^{-1}(3)$ .
3. Justifier que  $f^{-1}$  est croissante.

### V. Fonctions usuelles

**Exercice V.1.** 1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{a) } e^2 \times e^3 \times \frac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} \\ \text{b) } (e^{x-2})^2 \\ \text{c) } \ln \sqrt{e} \\ \text{d) } \ln\left(\frac{1}{e}\right) \\ \text{e) } 2 \ln(e^3) \\ \text{f) } e^{3 \ln(x)} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{g) } \ln\left(\frac{1}{e^x}\right) \\ \text{h) } e^{\frac{1}{2} \ln x} \\ \text{i) } \ln\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right) \\ \text{j) } \ln\left(\frac{1}{5} e^x\right) \\ \text{k) } \ln \sqrt{e^x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{l) } \ln(e^2) + \ln\left(\frac{1}{e^4}\right) \\ \text{m) } \ln(2 - \sqrt{3}) + \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \text{n) } 4 \ln\left(\frac{27}{\sqrt{12}}\right) - 2 \ln\left(\frac{\sqrt{18}}{16}\right) \\ \text{o) } x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} \\ \text{p) } \log_x(\log_x x^{x^y}). \end{array} \right.$$

2. Résoudre les équations :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \ln(x + 11) = \ln(x + 2) + \ln(x + 3); \\ \text{b) } e^{x-3} \cdot e^{2x+4} = e^5; \\ \text{c) } (e^{2x} - 3)(e^{-x} + 1) = 0; \\ \text{d) } e^{2x} - 2e^x - 3 = 0; \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{e) } 2^{x^3} = 3^{x^2}; \\ \text{f) } \operatorname{ch}(x) = 2; \\ \text{g) } 4 \operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) - 4 = 0. \end{array} \right.$$

**Exercice V.2.** Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions  $f$  suivantes, puis déterminer une fonction  $u$  et un réel  $\alpha$  tels que  $f(x) = (u(x))^\alpha$ .

|                             |                                 |                                       |
|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = (\sqrt{x})^3$    | 3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}$   | 5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$ |
| 2. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ | 4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ | 6. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^3}}$         |

**Exercice V.3.** 1. Montrer que pour tout réels  $x$  et  $y$ , on a :  $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$ .

2. Montrer que pour tout réels  $x$  et  $y$ , on a :  $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)$ .

3. Pour tout réel  $x$ , on pose  $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ . Montrer que :

|                                            |                                         |                                         |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| (a) $\text{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ ; | (b) $\text{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ ; | (c) $\text{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ . |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|

**Exercice V.4.** Démontrer que la fonction  $\text{sh}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . On note  $\text{argsh}$  sa réciproque. Déterminer une expression de  $\text{argsh}(x)$  en fonction de  $x$ .

**Exercice V.5.** 1. a) Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a :  $\ln x \leq x - 1$ .

b) En substituant  $x$  par  $\sqrt{x}$  dans l'inégalité précédente, démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2. (a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a :  $e^x \geq x + 1$ .

(b) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .

3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(x) \geq 1$ , puis que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\text{sh}(x) \geq x$ .

**Exercice V.6.** Étudier la limite en  $a$  de la fonction  $f$  pour :

|                                                             |                                                                |                                                                    |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| a) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{x+2}{x \ln x + \sqrt{x}}$ | f) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{x-e^x}{x+1}$                 | k) $a = 4$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$             |
| b) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}$         | g) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{x-1}{2x-(\ln x)^2}$          | l) $a = 0$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$ |
| c) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$            | h) $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$       | m) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln(x+e^x)}{x}$                  |
| d) $a = 0^+$ et $f(x) = x^2 \ln(2x)$                        | i) $a = -\infty$ et $f(x) = x^2 e^{-x} - x$                    | n) $a = +\infty$ et $f(x) = (x+2^x)^{\frac{1}{x}}$                 |
| e) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$           | j) $a = x_0 > 0$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$ | o) $a = 1^+$ et $f(x) = \ln(x) \ln(\ln(x))$                        |

**Exercice V.7.** Soit  $f : t \mapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

**Exercice V.8.** Soit  $f$  définie par  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  et préciser les limites de  $f$  aux bornes de  $\mathcal{D}$ .

2. (a) Démontrer que  $f'(x) = f(x)g(x)$  avec  $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$ .

(b) Étudier les limites en  $\pm\infty$  de  $g$ , ses variations. En déduire son signe.

(c) En déduire les variations de  $f$

**Exercice V.9.** Calculer :

|                                              |                                                          |                                                           |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | f) $\arctan(-1)$                                         | l) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |
| b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | g) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$              | m) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$  |
| c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$        | h) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$              | n) $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$  |
| d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$        | i) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$    | o) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$  |
| e) $\arctan(-\sqrt{3})$                      | j) $\arccos(\cos(4\pi))$                                 | p) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$  |
|                                              | k) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ |                                                           |

**Exercice V.10.** Calculer les dérivées des expressions suivantes, en précisant leurs domaines de définition :

|                          |                        |                                          |
|--------------------------|------------------------|------------------------------------------|
| a) $\arcsin(\sqrt{x})$   | c) $x^2 \arctan x^2$   | f) $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ |
| b) $\arcsin \frac{x}{3}$ | d) $\arctan(\sin(2x))$ | g) $\arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ |
|                          | e) $\ln(\arctan(x^2))$ |                                          |

**Exercice V.11.** Étudier les fonctions suivantes puis tracer leurs courbes représentatives :

1.  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ ;

2.  $g(x) = \arccos(\cos x)$ ;

3.  $h(x) = \arctan(\tan x)$ .

**Exercice V.12.** 1. On veut démontrer que pour tout  $x$  dans  $[-1, 1]$ ,  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ .(a) Montrer le résultat en étudiant la fonction  $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ .(b) Montrer le résultat en posant  $x = \sin \theta$  pour un certain  $\theta$ .

2. Démontrer que pour tout  $x > 0$  (resp.  $x < 0$ ),  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$  (resp.  $-\frac{\pi}{2}$ ).

3. Montrer la relation suivante sur un intervalle à préciser :  $2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ .

**Exercice V.13.** 1. (a) Sur quel intervalle  $I$  est définie la fonction  $x \mapsto \sin(\arccos x)$ ?(b) Montrer que pour tout  $x \in I$ , on a  $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ .

2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

3. (a) Sur quel ensemble  $\mathcal{D}$  la fonction  $x \mapsto \tan(\arccos x)$  est-elle définie?

(b) Montrer que pour tout  $x \in \mathcal{D}$ , on a  $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$  et  $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

4. Résoudre l'équation  $\arccos x = \arccos \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3}$ .

**Exercice V.14.** Résoudre les équations :

|                                                                    |                                                       |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| a) $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$                        | c) *** $\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$  |
| b) $2 \arctan x + \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$ | d) $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$ |

## VI. Études de fonctions

**Exercice VI.1.** Étudier, puis tracer le graphe des fonctions suivantes :

|                                       |                                                     |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. $f_1(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$  | 4. $f_4(x) = x \ln(x)$                              |
| 2. $f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ | 5. $f_5(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$    |
| 3. $f_3(x) = \sqrt{\cos x}$           | 6. $f_6(x) = \left 2x^2 - 6x + \frac{11}{8}\right $ |