

Calculs de limites

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soient $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

On ne donne pas pour l'instant de définition mathématique précise de limite. On dira qu'une fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a et on écrira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si « $f(x)$ se rapproche de ℓ lorsque x se rapproche de a ».

Opérations sur les limites

On prend d'abord $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Limite d'une somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f + g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit

$\lim f$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$\ell \times \ell'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Limite d'un quotient

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^\pm$	ℓ'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Proposition 1. Soient a, b et ℓ des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} g[f(x)] = \ell.$$

Théorème de comparaison

Théorème 2

Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si pour x proche de a	et lorsque x tend vers a	alors
$u(x) \leq f(x)$	$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$	$f \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$
$f(x) \leq u(x)$	$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$	$f \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$
$ f(x) - \ell \leq u(x)$	$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$	$f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$	$f \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$
$f(x) \leq g(x)$	f et g ont des limites	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Méthode : lever une indétermination

On dispose de plusieurs méthodes pour lever une forme indéterminée :

- lorsque $x \rightarrow \pm\infty$: mettre en facteur le terme qui va le plus vite vers $+\infty$;
- lorsque $x \rightarrow a$: factoriser par $x - a$;
- utiliser les croissances comparées;
- encadrer l'expression par deux expressions plus simples;
- reconnaître un taux d'accroissement;
- utiliser la quantité conjuguée lorsqu'il y a des racines.
- Autres outils au deuxième semestre :
 - équivalents;
 - développements limités.