

Un peu de logique - Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

- | | | |
|--------------------|--------------------------------|----------------------|
| 1. n est pair. | 3. n divise 1000. | 5. n est un carré. |
| 2. n est impair. | 4. n est une puissance de 2. | |

Exercice 2. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid p = n^2$ | 3. $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{N}, p = n^2$ |
| 2. $\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, p = n^2$ | 4. $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$ |

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier et donner leur négation à chaque fois.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ | 3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$ | 5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |
| 2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ | 4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ | |

Exercice 4. 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 2^{n+2} + 3$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.
Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n > 0$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n < 2$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
Montrer par récurrence sur n que $u_n = n^2 + n$.

Exercice 5. 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer par récurrence sur n que $u_n = 2^n + 3^n$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer par récurrence sur n que $u_n = 1 + 2^n$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq 2^{n-1}$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n^{-n}(u_1 + u_2^2 + u_3^3 + \dots + u_n^n)$.
Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 6. 1. Montrer par récurrence sur n que $n^2 > 4n + 3$ à partir d'un certain rang à déterminer.

2. Soient z et z' deux nombres complexes.

(a) Montrer que $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$

(b) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f , c'est-à-dire la fonction obtenue en dérivant successivement n fois f .

Démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{x^{n+1}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1 + nx$.