

Outils pour l'étude de fonctions - Exercices

I. Propriétés générales des fonctions

- Exercice I.1.** 1. Tracer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 4]$. Tracer ensuite les graphes des fonctions $f(x) + 2$, $f(x + 2)$, $f(2x)$ et $2f(x)$.
2. Tracer sur $[-3, 5]$ le graphe de la fonction f qui est 1-périodique et telle que : $\forall x \in [-1/2, 1/2], f(x) = |x|$.
3. Tracer sur $[-3, 5]$ le graphe de la fonction g qui est 2-périodique et telle que : $\forall x \in [-1, 1], g(x) = x^2$.
4. Tracer sur $[-3, 3]$ le graphe de la fonction h qui est 1-périodique et telle que : $\forall x \in [0, 1[, h(x) = x$.

- Exercice I.2.** 1. Pour chaque couple de fonctions f et g , déterminer les ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ et les calculer :

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$; (b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; (c) $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \ln(x)$

2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$:

(a) $h(x) = \sqrt{3x - 1}$; (b) $h(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; (c) $h(x) = \frac{1}{x + 7}$; (d) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$; (e) $h(x) = e^{\cos x}$

- Exercice I.3.** Les fonctions suivantes sont-elles majorées? minorées? bornées?

1. $f : x \mapsto \sin(x) e^x$

2. $g : x \mapsto \frac{2 \cos(x) + 2 \sin(x)}{1 + e^x}$.

- Exercice I.4.** Soient $f, g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors $f + g$ est aussi monotone (resp. strictement monotone) de même monotonie.
- Montrer que si f et g sont monotones de même monotonie et positives alors fg est aussi monotone de même monotonie. Donner un contre-exemple lorsque les deux fonctions ne sont pas positives.
- Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de même monotonie alors $f \circ g$ est croissante (resp. strictement croissante).
- Montrer que si f et g sont monotones (resp. strictement monotones) de monotonies contraires alors $f \circ g$ est décroissante (resp. strictement décroissante).

- Exercice I.5.** 1. Montrer que si f et g sont bornées, alors $f + g$ et fg sont bornées.

2. Si f et g sont deux fonctions majorées, fg est-elle majorée?

- Exercice I.6.** 1. Soit f une fonction paire sur $\mathbb{R}$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

2. Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $g : t \mapsto \sin(\omega t)$ est périodique et déterminer sa période en fonction de ω .

- Exercice I.7.** Montrer qu'une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$ est constante.

II. Calculs de dérivées

- Exercice II.1.** Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f_1(x) = x^e$ 2. $f_2(t) = (at - 1) \sin(7t + 2)$ 3. $f_3(u) = \frac{u}{u^2 - \tau^2}$ 4. $f_4(t) = \pi^t$	5. $f_5(x) = \sin^4 x$ 6. $f_6(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 4}$ 7. $f_7(t) = \ln((2t + 1)(t^2 + 1))$ 8. $f_8(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 1}$	9. $f_9(t) = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x^4}\right)$ 10. $f_{10}(x) = \tan(\cos(x))$ 11. $f_{11}(x) = x + 1 ^{\frac{1}{3}}$ 12. $f_{12}(x) = x e^{\frac{1}{\ln x}}$
---	---	--

- Exercice II.2.** 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$, où a, b et c sont 3 réels. Déterminer a, b et c pour que $\mathcal{C}_f$ ait les propriétés suivantes :

- $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0, 5)$;
- la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A est parallèle à l'axe des abscisses;
- la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -3 .

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions $g_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$.

- (a) Montrer que les tangentes en 0 aux courbes des fonctions g_λ sont parallèles entre elles.
- (b) Démontrer que les tangentes en 1 aux courbes des fonctions g_λ sont concourantes.

III. Limites

Exercice III.1. Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} \quad \left| \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \left| \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad \left| \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \left| \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{x} \right. \right.$$

Exercice III.2. Pour chaque fonction f , vérifier que la droite d'équation donnée est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$:

1. $f(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{x - 2}$, $y = -x + 4$ en $\pm\infty$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$, $y = x + 2$ en $+\infty$
3. $f(x) = 3x + 1 + \frac{\sin(5x)}{2x}$, $y = 3x + 1$ en $+\infty$

IV. Bijections

Exercice IV.1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. En déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de f .

Exercice IV.2. Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble à préciser, et écrire les fonctions réciproques :

$$\begin{array}{l} 1. f_1(x) = 3x - 5 \\ 2. f_2(x) = \sqrt{3} - x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 3. f_3(x) = x^2 - 1 \text{ sur }]-\infty, 0] \\ 4. f_4(x) = \frac{1}{3x - 2} \end{array} \quad \left| \quad 5. f_5(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1} \right.$$

Exercice IV.3. Soit $f : x \mapsto x^3 + x + 1$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(3)$.
3. Justifier que f^{-1} est croissante.

V. Fonctions usuelles

Exercice V.1. 1. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{a) } e^2 \times e^3 \times \frac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} \\ \text{b) } (e^{x-2})^2 \\ \text{c) } \ln \sqrt{e} \\ \text{d) } \ln\left(\frac{1}{e}\right) \\ \text{e) } 2 \ln(e^3) \\ \text{f) } e^{3 \ln(x)} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{g) } \ln\left(\frac{1}{e^x}\right) \\ \text{h) } e^{\frac{1}{2} \ln x} \\ \text{i) } \ln\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right) \\ \text{j) } \ln\left(\frac{1}{5} e^x\right) \\ \text{k) } \ln \sqrt{e^x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{l) } \ln(e^2) + \ln\left(\frac{1}{e^4}\right) \\ \text{m) } \ln(2 - \sqrt{3}) + \ln(2 + \sqrt{3}) \\ \text{n) } 4 \ln\left(\frac{27}{\sqrt{12}}\right) - 2 \ln\left(\frac{\sqrt{18}}{16}\right) \\ \text{o) } x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} \\ \text{p) } \log_x(\log_x x^{x^y}). \end{array} \right.$$

2. Résoudre les équations :

$$\begin{array}{l} \text{a) } \ln(x + 11) = \ln(x + 2) + \ln(x + 3); \\ \text{b) } e^{x-3} \cdot e^{2x+4} = e^5; \\ \text{c) } (e^{2x} - 3)(e^{-x} + 1) = 0; \\ \text{d) } e^{2x} - 2e^x - 3 = 0; \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{e) } 2^{x^3} = 3^{x^2}; \\ \text{f) } \operatorname{ch}(x) = 2; \\ \text{g) } 4 \operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) - 4 = 0. \end{array} \right.$$

Exercice V.2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f suivantes, puis déterminer une fonction u et un réel α tels que $f(x) = (u(x))^\alpha$.

1. $f(x) = (\sqrt{x})^3$	3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}$	5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$	4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$	6. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^3}}$

Exercice V.3. 1. Montrer que pour tout réels x et y , on a : $\text{ch}(x+y) = \text{ch}(x)\text{ch}(y) + \text{sh}(x)\text{sh}(y)$.

2. Montrer que pour tout réels x et y , on a : $\text{sh}(x+y) = \text{sh}(x)\text{ch}(y) + \text{ch}(x)\text{sh}(y)$.

3. Pour tout réel x , on pose $t = \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que :

(a) $\text{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$;	(b) $\text{sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$;	(c) $\text{th}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.
--	---	---

Exercice V.4. Démontrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa réciproque. Déterminer une expression de $\text{argsh}(x)$ en fonction de x .

Exercice V.5. 1. a) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \leq x - 1$.

b) En substituant x par $\sqrt{x}$ dans l'inégalité précédente, démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1$.

(b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 1$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\text{sh}(x) \geq x$.

Exercice V.6. Étudier la limite en a de la fonction f pour :

a) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{x+2}{x \ln x + \sqrt{x}}$	f) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{x-e^x}{x+1}$	k) $a = 4$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$
b) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x-3}$	g) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{x-1}{2x-(\ln x)^2}$	l) $a = 0$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$
c) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$	h) $a = +\infty$ et $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$	m) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln(x+e^x)}{x}$
d) $a = 0^+$ et $f(x) = x^2 \ln(2x)$	i) $a = -\infty$ et $f(x) = x^2 e^{-x} - x$	n) $a = +\infty$ et $f(x) = (x+2^x)^{\frac{1}{x}}$
e) $a = +\infty$ et $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$	j) $a = x_0 > 0$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$	o) $a = 1^+$ et $f(x) = \ln(x) \ln(\ln(x))$

Exercice V.7. Soit $f : t \mapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Dresser le tableau de variation de f .

Exercice V.8. Soit f définie par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f et préciser les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

2. (a) Démontrer que $f'(x) = f(x)g(x)$ avec $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$.

(b) Étudier les limites en $\pm\infty$ de g , ses variations. En déduire son signe.

(c) En déduire les variations de f

Exercice V.9. Calculer :

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	f) $\arctan(-1)$	l) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	g) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	m) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$	h) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	n) $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$
d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$	i) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$	o) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
e) $\arctan(-\sqrt{3})$	j) $\arccos(\cos(4\pi))$	p) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$
	k) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$	

Exercice V.10. Calculer les dérivées des expressions suivantes, en précisant leurs domaines de définition :

a) $\arcsin(\sqrt{x})$	c) $x^2 \arctan x^2$	f) $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
b) $\arcsin \frac{x}{3}$	d) $\arctan(\sin(2x))$	g) $\arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
	e) $\ln(\arctan(x^2))$	

Exercice V.11. Étudier les fonctions suivantes puis tracer leurs courbes représentatives :

1. $f(x) = \arcsin(\sin x)$;

2. $g(x) = \arccos(\cos x)$;

3. $h(x) = \arctan(\tan x)$.

Exercice V.12. 1. On veut démontrer que pour tout x dans $[-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.(a) Montrer le résultat en étudiant la fonction $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.(b) Montrer le résultat en posant $x = \sin \theta$ pour un certain θ .

2. Démontrer que pour tout $x > 0$ (resp. $x < 0$), $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (resp. $-\frac{\pi}{2}$).

3. Montrer la relation suivante sur un intervalle à préciser : $2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice V.13. 1. (a) Sur quel intervalle I est définie la fonction $x \mapsto \sin(\arccos x)$?(b) Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. (a) Sur quel ensemble $\mathcal{D}$ la fonction $x \mapsto \tan(\arccos x)$ est-elle définie?

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Résoudre l'équation $\arccos x = \arccos \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3}$.

Exercice V.14. Résoudre les équations :

a) $\arctan x + \arctan 2x = \frac{\pi}{4}$	c) *** $\arcsin 2x = \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2})$
b) $2 \arctan x + \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$	d) $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$

VI. Études de fonctions

Exercice VI.1. Étudier, puis tracer le graphe des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$	4. $f_4(x) = x \ln(x)$
2. $f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	5. $f_5(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$
3. $f_3(x) = \sqrt{\cos x}$	6. $f_6(x) = \left 2x^2 - 6x + \frac{11}{8}\right $

VII. Indications - Solutions

Exercice I.1 : Application immédiate du cours.

Exercice I.2 :

- $f \circ g(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ et $g \circ f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - $f \circ g(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$ sur $\mathbb{R}$.
 - $f \circ g(x) = \ln(x)^2 - 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g \circ f(x) = \ln(x^2 - 2)$ sur $] -\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.
- $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x - 1$
 - $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x + \frac{\pi}{2}$
 - $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = x + 7$
 - $u(x) = \frac{x}{x+4}$ et $v(x) = x^2$
 - $u(x) = e^x$ et $v(x) = \cos x$.

Exercice I.3 :

- f n'est ni majorée ni minorée car $f(2\pi n + \pi/2) = e^{2\pi n + \pi/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(2\pi n - \pi/2) = -e^{2\pi n - \pi/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- $1 \leq 1 + e^x$ et $|2\cos(x) + 2\sin(x)| \leq 4$, donc $|g(x)| \leq 4$: g est bornée.

Exercice I.4 : Il faut distinguer les cas croissants/décroissants.

- Faisons le cas où f et g sont croissantes et montrons alors que $f+g$ est croissante. Soient $x, y \in I$ avec $x \leq y$. Comme f et g sont croissantes, $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$. Comme $\leq$ est compatible avec $+$, $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$, autrement dit $(f+g)(x) \leq (f+g)(y)$.
- Faisons le cas où f et g sont décroissantes et montrons alors que $f+g$ est décroissante. Soient $x, y \in I$ avec $x \leq y$. Comme f et g sont décroissantes, $f(x) \geq f(y)$ et $g(x) \geq g(y)$. Comme f et g sont positives, $f(x)g(x) \geq f(y)g(y)$, autrement dit $(fg)(x) \geq (fg)(y)$. Comme contre exemple, on peut prendre $f(x) = x$ et $g(x) = x$ qui sont croissantes sur $\mathbb{R}$. Le produit $(fg)(x) = x^2$ n'est pas monotone.
- Faisons le cas où f et g sont croissantes et montrons alors que $f \circ g$ est croissante. Soient $x, y \in I$ avec $x \leq y$. Comme f et g sont croissantes, $g(x) \leq g(y)$ et $f(g(x)) \leq f(g(y))$, autrement dit $f \circ g(x) \leq f \circ g(y)$.
- idem.

Exercice I.5 :

- Il existe M, M' tels que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M'$. Donc pour tout $x \in I$, $|f(x)g(x)| \leq MM'$ et $|f(x) + g(x)| \leq M + M'$.
- Non, par exemple, $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Le signe est important!

Exercice I.6 :

- Soient $x < y \leq 0$. Alors $0 \leq -y < -x$, donc $f(-y) \leq f(-x)$ par croissance, puis $f(y) \leq f(x)$ par parité.
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ c'est la pulsation.

Exercice I.7 : Soit f une fonction T -périodique croissante. Que dire des valeurs de $f(x)$, $f(x+T)$? Comparer ensuite $f(x)$, $f(x+T)$ et $f(y)$ pour $y \in [x, x+T]$. Conclure.

Exercice II.1 :

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> $f_1'(x) = e^{x-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $f_2'(t) = a \sin(7t+2) + 7(at-1) \cos(7t+2)$ sur $\mathbb{R}$ $f_3'(u) = -\frac{u^2 + \tau^2}{(u^2 - \tau^2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm \tau\}$ $f_4'(t) = \ln(\pi) \pi^t$ sur $\mathbb{R}$ $f_5'(x) = 4 \cos(x) \sin^3 x$ sur $\mathbb{R}$ $f_6'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x+4)^2}$ sur $\mathbb{R}$ $f_7'(t) = \frac{2}{2t+1} + \frac{2t}{t^2+1}$ sur $] -1/2, +\infty[$ | <ol style="list-style-type: none"> $f_8'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x-1}}$ sur $] -\infty, 3-\sqrt{10}[\cup]3+\sqrt{10}, +\infty[$ $f_9'(x) = -\frac{4}{x^5} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x^4}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$ $f_{10}(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos^2(\cos(x))}$ sur $\mathbb{R}$ $f_{11}(x) = \frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ sur $] -1, +\infty[$ et $= -\frac{1}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}}$ sur $] -\infty, -1[$ $f_{12}(x) = \left(1 - \frac{1}{\ln^2(x)}\right) e^{\frac{1}{\ln(x)}}$ sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ |
|---|---|

Exercice II.2 :

- $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0,5)$ donne $f(0) = 5$, donc $c = -10$;
 - comme $f'(x) = \frac{ax^2 - 4ax - 2b - c}{(x-2)^2}$, on trouve $b = -c/2 = 5$;
 - de même, on trouve $a = 1$.
- Comme $g'_\lambda(x) = \frac{-x^2 - 2\lambda x + 1}{(x^2 + 1)^2}$, on trouve $g'_\lambda(0) = 1$.
 - L'équation de la tangente en 1 est $y = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2}$. En prenant $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$, on trouve que ces deux tangentes se coupent en $(2, 1/2)$. On vérifie ensuite que ce point est sur toutes les autres tangentes.

Exercice III.1 : On fait apparaître à chaque fois un taux d'accroissement :

- $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = 1.$
- $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = 1.$
- $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1}}{1+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$
- $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{1+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1.$
- $\frac{\tan(3x)}{x} = \frac{\tan(3x) - \tan(3 \times 0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3(1 + \tan^2(0)) = 3.$

Exercice III.2 : On calcule à chaque fois la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ de $f(x) - y$.

Exercice IV.1 :

- Soit $y \in \mathbb{R}^*$. Il existe une unique solution à l'équation $\frac{1}{x} = y$ qui est $x = \frac{1}{y}$. Donc f est une bijection. Sa réciproque est elle-même!
- La courbe représentative de f est symétrique par rapport à $y = x$.

Exercice IV.2 : On réalise un tableau de variations à chaque fois pour déterminer l'ensemble image de la fonction.

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = 3x - 5 \iff x = \frac{1}{3}(y + 5), f_1^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 5).$
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = \sqrt{3} - x \iff x = \sqrt{3} - y, f_2^{-1}(x) = \sqrt{3} - x.$
- $] -\infty, 0] \rightarrow [-1, +\infty[, y = x^2 - 1 \iff y + 1 = x^2 \iff x = -\sqrt{y+1}, f_3^{-1}(x) = -\sqrt{y+1}.$
- $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^*, y = \frac{1}{3x-2} \iff 3xy - 2y = 1 \iff x = \frac{2y+1}{3y}, f_4^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x}.$
- $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}, y = \frac{3x+2}{2x-1} \iff 2xy - y = 3x + 2 \iff x(2y-3) = y+2 \iff x = \frac{y+2}{2y-3}, f_5^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-3}.$

Exercice IV.3 :

- On utilise le TBM : f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
- $f^{-1}(1) = 0$ car $f(0) = 1$ et $f^{-1}(3) = 1$.
- On peut justifier que f^{-1} est dérivable et trouver le signe de sa dérivée avec le TBM. Ou bien on prend $x \leq y$ et on remarque que $x = f(x'), y = f(y')$. Comme f est croissante, on a forcément $x' \leq y'$.

Exercice V.1 :

- | | | |
|--|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <ol style="list-style-type: none"> $e^2 \times e^3 \times \frac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} = e^7$ $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$ $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ $2\ln(e^3) = 6$ $e^{3\ln(x)} = x^3$ | <ol style="list-style-type: none"> $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right) = -x$ $e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$ $\ln\left(\frac{1}{e^{-2x}}\right) = 2x$ $\ln\left(\frac{1}{5}e^x\right) = x - \ln(5)$ $\ln \sqrt{e^x} = \frac{x}{2}$ | <ol style="list-style-type: none"> $\ln(e^2) + \ln\left(\frac{1}{e^4}\right) = -2$ $\ln(2 - \sqrt{3}) + \ln(2 + \sqrt{3}) = 0$ $4\ln\left(\frac{27}{\sqrt{12}}\right) - 2\ln\left(\frac{\sqrt{18}}{16}\right) = 8\ln(3) + 3\ln(2)$ $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \ln x$ $\log_x(\log_x x^{x^y}) = y.$ |
|--|---|---|

2.

- | | |
|--|--|
| a) $S = \{1\};$ | e) $S = \left\{0, \frac{\ln 3}{\ln 2}\right\}$ |
| b) $S = \left\{\frac{1 \pm \sqrt{35}}{2}\right\};$ | f) $S = \{\ln(2 \pm \sqrt{3})\};$ |
| c) $S = \{\ln(3)/2\};$ | g) $S = \{0; -\ln(3)\}.$ |
| d) $S = \{\ln(3)\};$ | |

Exercice V.2 :

1. $f(x) = (\sqrt{x})^3, D_f = \mathbb{R}^+$ et $u(x) = x, \alpha = 3/2$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, D_f = \mathbb{R}$ et $u(x) = x^2 + 1, \alpha = -1$
3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^5}, D_f = \mathbb{R}$ et $u(x) = x-1, \alpha = 5/3$
4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}, D_f = \mathbb{R}_*^+$ et $u(x) = x, \alpha = -3/2$
5. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}, D_f = \mathbb{R}_*^+$ et $u(x) = x, \alpha = 5/4$
6. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^3}}, D_f = \mathbb{R}^+$ et $u(x) = x, \alpha = 3/8.$

Exercice V.3 : On remplace les fonctions hyperboliques par des exponentielles partout.

Exercice V.4 : On utilise le TBM : sh est continue strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sh}(x) = \pm\infty$. On résout $\text{sh}(x) = y \iff e^x - e^{-x} = 2y \iff (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \text{argsh}(y).$

Exercice V.5 :

1. a) On pose $f(x) = x - 1 - \ln x$, définie pour tout $x > 0$. On démontre ensuite que $f(x) \geq 0$ en étudiant les variations de f .
b) On substitue puis on divise par x , en se rappelant que $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$.
2. (a) Même principe que les questions précédentes.
(b) La dérivée de $x \mapsto e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ est $x \mapsto e^x - 1 - x$ qui est positive!
3. On peut utiliser $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$ pour la première inégalité, puis on étudie la fonction $x \mapsto \text{sh}(x) - x$ pour la deuxième.

Exercice V.6 :

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x \ln x + \sqrt{x}} = 0$ | f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - e^x}{x+1} = -\infty$ | k) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{3}{2}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^x-3} = +\infty$ | g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x - (\ln x)^2} = \frac{1}{2}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1} = -1$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} = 0$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = 0$ | m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^2-2}{x}} = +\infty$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(2x) = 0$ | i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} - x = +\infty$ | n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = 1$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$ | j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ | o) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x)) = 0$ |

Exercice V.7 : Soit $f: t \mapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.

1. $D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[.$
2. $\lim_{t \rightarrow -1} f(t) = 0$ (croissances comparées), $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$ (limite du taux d'accroissement), $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.
3. f est dérivable sur D_f , et $f'(t) = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \geq 0$. Donc f est croissante.

Exercice V.8 :

1. $\mathcal{D} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1}$.
2. (a) Dériver l'expression $f(x) = \exp\left(x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)$.

(b) $g'(x) = -\frac{1}{x(x-1)^2}$, g est croissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]1, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, donc g est positive sur $\mathcal{D}$.

(c) f et g sont positives, donc f est croissante.

Exercice V.9 :

a) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$	f) $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$	l) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$
b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$	g) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$	m) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$
c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$	h) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	n) $\arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$
d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$	i) $\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$	o) $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$
e) $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$	j) $\arccos(\cos(4\pi)) = 0$	p) $\arctan\left(\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$
	k) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$	

Exercice V.10 :

a) $\arcsin(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} \text{ sur }]0, 1[$	e) $\ln(\arctan(x^2)) = \frac{2x}{(1+x^4)\arctan(x^2)} \text{ sur } \mathbb{R}^*$
b) $\arcsin \frac{x}{3} = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \text{ sur }]-3, 3[$	f) $\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2+1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
c) $x^2 \arctan x^2 = \frac{2x^3}{1+x^4} + 2x \arctan(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}$	g) $\arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{-1}{(x+1)\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[.$
d) $\arctan(\sin(2x)) = \frac{2\cos(2x)}{1+\sin^2(2x)} \text{ sur } \mathbb{R}$	

Exercice V.11 : Faire bien attention à l'intervalle où se trouve la variable.

Exercice V.12 :

- $f'(x) = 0$ sur $]-1, 1[$. Donc f est constante sur $]-1, 1[$, égale à $f(0) = \frac{\pi}{2}$. On vérifie ensuite que $f(1) = f(-1) = \frac{\pi}{2}$.
- Comme $x \in [-1, 1]$, prenons $\theta = \arcsin(x)$. On a $\sin \theta = x$. Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin \theta) = \theta$. De plus, $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$, donc $\arccos(\sin \theta) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \theta$. Donc $\arcsin x + \arccos x = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$.
- Posons $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$, donc f est constante sur $]-\infty, 0[$, égale à $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et sur $]0, +\infty[$, égale à $f(1) = \frac{\pi}{2}$. On peut aussi poser $x = \tan \theta$ pour un certain $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis utiliser $\frac{1}{\tan \theta} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.
- Posons $f(x) = 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x$ sur $]-1, 1[$. $f'(x) = 0$, donc f est constante et vaut $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice V.13 :

- (a) $I = [-1, 1]$.
(b) Voir le cours.
- On utilise la formule $1 + \tan^2 x = \cos^2 x$. On obtient $\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2(\arctan x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$. On fait ensuite attention aux signes.
- (a) $\mathcal{D} = [-1, 0[\cup]0, 1]$.
(b) On revient à la définition de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ et on utilise les formules démontrées précédemment.
- Rappelons que si $a, b \in [0, \pi]$, alors $a = b \iff \cos a = \cos b$. Or $\arccos x \in [0, \pi]$ et $0 \leq \arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{3} \leq 2 \arccos \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$. On peut donc prendre le cos des deux côtés de l'équation, puis on linéarise $\cos(a+b)$ et on utilise les formules précédentes : $x = \cos\left(\arccos \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$. $S = \left\{ \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6} \right\}$.

Exercice V.14 :

- a) On prend la tangente des deux côtés, puis on résoud. On trouve deux solutions $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$. La première est négative, donc $\arctan x_1 + \arctan 2x_1 < 0$: l'équation de départ n'est pas vérifiée. Pour la deuxième, $\frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \leq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq \theta = \arctan x_2 + \arctan 2x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ et $\tan \theta = 1$: x_2 est bien solution. $S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.
- b) On remarque déjà que comme $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il n'y a qu'une seule solution. On prend le cosinus des deux côtés, puis on résoud. On trouve deux solutions $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. On peut montrer que x_1 ne convient pas directement : $\arccos \frac{4}{5} < \frac{\pi}{4}$ car $\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, et $\arctan x_1 < -\frac{\pi}{4}$ car $x_1 < -1$. Donc $2\arctan x_1 + \arccos \frac{4}{5} < 0$. Puis, comme $0 \leq x_2 \leq 1$, $2\arctan x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; de plus $\arccos \frac{4}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\theta = 2\arctan x_2 + \arccos \frac{4}{5} \in [0, \pi]$ et $\cos(\theta) = 0$. Donc $\theta = \frac{\pi}{2}$. $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.
- c) On remarque déjà que si on change x en $-x$, on ne change pas l'équation. Donc si on a une solution x , son opposée $-x$ est aussi solution. On prend le sinus des deux côtés, puis on résoud. On trouve trois solutions $x_0 = 0$, $x_1 = -\frac{\sqrt{14}}{8}$ et $x_2 = \frac{\sqrt{14}}{8}$. La première est bien solution. Comme $\arcsin 2x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, il faut aussi avoir $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{2}) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Or $0 \geq x_1 \geq -\frac{1}{2}$ et $0 \geq x_1\sqrt{2} \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \geq \arcsin x_1 + \arcsin x_1\sqrt{2} \geq -\frac{\pi}{2}$: x_1 est solution. D'autre part, $x_2 = -x_1$, donc x_2 est aussi solution. $S = \left\{ 0, -\frac{\sqrt{14}}{8}, \frac{\sqrt{14}}{8} \right\}$.
- d) On prend le sinus des deux côtés, puis on résoud. On trouve $[0, 1]$ comme solutions. Pour vérifier les solutions, on prend $x \in [0, 1]$ et $\theta = \arcsin x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$. $S = [0, 1]$.

Exercice VI.1 :

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$. $f_1(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$ est croissante sur les deux intervalles. Asymptote oblique $y = x - 2$ en $\pm\infty$ et asymptote verticale en $x = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f_1(x) = \mp\infty$.
- Ensemble de définition : $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. f_2 est paire. $f_2'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$ donc f est décroissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f_2(x) = \pm\infty$. Asymptote horizontale $y = 1$.
- Ensemble de définition : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$. On a $f_3(x + 2\pi) = f_3(x)$, et $f_3(-x) = f_3(x)$ donc on étudie f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f_3'(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \leq 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc f_3 est décroissante sur cet intervalle.
- Ensemble de définition : $]0, +\infty[$. On a $f_4'(x) = \ln(x) + 1$, donc f_4 est décroissante sur $]0, 1/e]$ et croissante sur $[1/e, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = 0$ et la tangente est verticale.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} > x$, donc f_5 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire donc on étudie sur $[0, +\infty[$. De plus, $f_5'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$, donc f_5 est décroissante sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_5(x) = \mp\infty$.
- On étudie $g(x) = 2x^2 - 6x + \frac{11}{8} = 2(x - 3/2)^2 - \frac{25}{8}$ et s'annule en $\frac{1}{4}$ et $\frac{11}{4}$. On trace la parabole, puis on replie pour obtenir f_6 .