

Chapitre 5 : Sommes et produits

I. Manipulations de somme et de produits

I.1. Notations et exemples

Définition 1. Soit I un ensemble fini et non vide et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I . On note $\sum_{i \in I} a_i$ (resp. $\prod_{i \in I} a_i$) la somme (resp. le produit) de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.
Si I est l'ensemble vide, on convient que $\sum_{i \in I} a_i$ vaut 0 et $\prod_{i \in I} a_i$ vaut 1.

Remarque I.1. L'indice i est muet et n'existe que dans la somme/le produit. On peut donc le remplacer par un autre symbole qui n'est pas utilisé ailleurs. Il n'apparaît pas forcément non plus dans la somme/le produit.

Notation I.1. Si $I = \llbracket p, q \rrbracket$, on notera alors :

$$\sum_{i \in I} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q = \sum_{i=p}^q a_i = \sum_{p \leq i \leq q} a_i.$$

Remarque I.2. Dans la somme $\sum_{k=p}^q a_k$, il y a termes.

Exemple I.1. • La somme des n premiers entiers strictement positifs s'écrit :

• La somme des huit premières puissances de 2 s'écrit :

• $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = \dots\dots\dots$

• Le produit $\prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ se note aussi $n!$ et se lit « **factorielle n** ». On prend comme convention que $0! = 1$.

Exemple I.2. On a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 =$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 =$$

Mais : $\sum_{i=1}^n k^2 =$

Exercice 1. 1. Écrire chacune des expressions suivantes avec le signe $\sum$:

(a) $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4 =$

(b) $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} =$

(c) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 =$

(d) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_dx^d =$

(e) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 =$

(f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} =$

(g) $2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12} =$

(h) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024} =$

(i) $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50 =$

(j) $q - q^2 + q^3 - q^4 + q^5 - \cdots + q^{31} =$

(k) $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} =$

2. Écrire chacune des expressions suivantes sans le signe $\sum$ ou $\prod$:

(a) $\sum_{k=1}^8 1 =$

(b) $\sum_{j=0}^4 \frac{1}{2} =$

(c) $\sum_{k=0}^5 (-1)^k =$

(d) $\sum_{k=0}^5 a_{3k+1} =$

(e) $\prod_{k=1}^n x =$

(f) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} =$

(g) $\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} =$

(h) $\frac{5!}{4!} =$

(i) $\frac{n!}{k!(n-k)!} =$

I.2. Linéarité, relation de Chasles et autres propriétés

Exemple I.3. • Lorsqu'on ajoute toujours le même nombre :

$$\sum_{k=1}^n a =$$

• Lorsqu'on sort un terme :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \sum_{k=2}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

• Lorsque on somme une somme :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) =$$

• Lorsqu'on a un facteur commun :

$$\sum_{i=1}^n \lambda a_i =$$

• Un télescopage :

$$\sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) =$$

Proposition 1. 1. $\sum_{k=p}^q a = a(q-p+1)$;

2. $\sum_{k=p}^q a_k = a_p + \sum_{k=p+1}^q a_k$;

3. $\sum_{k=p}^q a_k = a_q + \sum_{k=p}^{q-1} a_k$;

4. $\sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in I} b_k = \sum_{k \in I} (a_k + b_k)$ (linéarité);

5. $\sum_{k \in I} \lambda a_k = \lambda \sum_{k \in I} a_k$ (homogénéité);

6. $\sum_{k=p}^q (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$ (télescopage);

7. $\sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=q+1}^r a_k = \sum_{k=p}^r a_k$ (Chasles);

8. $\left| \sum_{k=p}^q a_k \right| \leq \sum_{k=p}^q |a_k|$ (Inégalité triangulaire).

Proposition 2. 1. $\prod_{k=p}^q a = a^{q-p+1};$

$$2. \prod_{k=p}^q a_k \prod_{k=p}^q b_k = \prod_{k=p}^q (a_k b_k);$$

$$3. \prod_{k=p}^q (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^q a_k;$$

$$4. \prod_{k=p}^q (a_k)^m = \left(\prod_{k=p}^q a_k \right)^m;$$

$$5. \left| \prod_{k=p}^q a_k \right| = \prod_{k=p}^q |a_k|;$$

$$6. \prod_{k=p}^q \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p} \text{ (téléscope);}$$

$$7. \prod_{k=p}^q a_k \times \prod_{k=q+1}^r a_k = \prod_{k=p}^r a_k \text{ (Chasles).}$$

Exemple I.4. • Le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ vaut :

• Le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$ vaut :

Exercice 2. 1. Calculer :

$$\sum_{i=1}^9 i =$$

$$\sum_{i=1}^9 2i =$$

$$\sum_{k=1}^9 (3k-5) =$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{j}{2} =$$

2. Calculer :

$$\sum_{k=1}^4 2^k =$$

$$\sum_{i=1}^4 3^i =$$

$$\sum_{j=1}^4 (2^j + 3^j) =$$

$$\sum_{l=1}^4 (2^{l+1} + 1) =$$

3. Calculer :

$$\sum_{k=0}^3 k =$$

$$\sum_{k=0}^3 k^2 =$$

$$\left(\sum_{k=0}^3 k \right)^2 =$$

4. Calculer :

$$\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 =$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} =$$

I.3. Changement d'indice

Proposition 3. Soient $p \leq q$ deux entiers naturels, $N \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On a

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p+N}^{q+N} a_{k-N} \text{ et } \prod_{k=p}^q a_k = \prod_{k=p+N}^{q+N} a_{k-N}$$

et

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{q-k}$$

Exemple I.5. En pratique, on peut poser le changement d'indice pour ne pas se tromper.

- Pour modifier la somme $\sum_{k=0}^n (k+1)^2$, on pose $i = k+1$. Alors lorsque $k = 0$, on a $i = \dots$ et lorsque $k = n$, $i = \dots$

Donc $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 = \dots$

- Considérons la somme $\sum_{k=0}^n k$ et posons $i = n - k$. Lorsque $k = 0$, $i = \dots$ et lorsque $k = n$, $i = \dots$, de sorte que

$\sum_{k=0}^n k = \dots$

Donc $2 \sum_{k=0}^n k = \dots$

Exercice 3. Compléter les expressions suivantes en terminant les changements d'indice :

1. $\sum_{k=2}^5 a_k = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{5-i}$

3. $\sum_{k=p+1}^{q+1} a_k = \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{i+1}$

4. $\sum_{k=n+1}^{2n} x_k = \sum_{l=1}^n x_{\dots}$

6. $\sum_{j=3}^{n+2} u_{j+1} = \sum_{i=\dots}^n u_{\dots}$

2. $\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{j=1}^{n+1} x_{\dots}$

5. $\sum_{i=3}^n u_{i+2} = \sum_{k=\dots}^{\dots} u_k$

7. $\sum_{k=4}^{n-1} a_k = \sum_{i=1}^{\dots} a_{\dots}$

Exercice 4. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} =$

2. $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) =$

3. $\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2 \sum_{k=2}^{n+1} a_k =$

4. $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) =$

5. $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) =$

6. $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)} b^{k+1} =$