

Devoir Surveillé 02

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Onze questions indépendantes).

- Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $(1+i)^{12}$.
- On pose $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
 - Déterminer le module et un argument de j .
 - Calculer j^3 et $j+j^2$.
 - Soit $k \in \mathbb{N}$ un multiple de 3. Montrer que $1+j^k+j^{2k}=3$.
 - Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Montrer que $1+j^{3\ell+1}+j^{2(3\ell+1)}=0$.
- On pose $z = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{4}}$.
 - Déterminer la forme algébrique de z .
 - En déduire une expression du module de z .
 - Factoriser z par l'angle moitié.
 - En déduire une expression de $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.
 - Déterminer un argument de z .
- Soient $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}$, $g: x \mapsto \ln(x^2-1)\cos(x)$ et $h: x \mapsto \sin(x^2+1)e^{2x}$.
 - Déterminer les ensembles de définition de f , g et h .
 - Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f .
- Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x-\ln(x)}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}-e^x}{x-x^4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
--	---
- Soit f définie autour d'un réel a . Rappeler la définition de f est dérivable en a .
- Soient $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.
 - Écrire la définition de f est croissante sur I .
 - On suppose que f est croissante sur I et g est décroissante sur J . Montrer que $g \circ f$ est décroissante sur I .
- Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrer que $f+g$ et fg sont bornées.
- Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Rappeler la définition de $x \mapsto x^a$ et son ensemble de définition.
- Soit $f: x \mapsto \cos(x)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
 - Rappeler l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de arccos.
 - Tracer dans l'ordre et sur le même graphique :
 - la tangente au point d'abscisse $\pi/2$;
 - la courbe de f sur $[-\pi, \pi]$;
 - la courbe de arccos;
 - la courbe de $x \mapsto \arccos(x+1)$.

Exercice 2 (Une étude de fonction).

On définit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x} + 1$.

1. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
 (b) En déduire que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 (b) En utilisant les quantités conjuguées, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\frac{1}{2}$.
 (c) De même, déterminer la limite de la fonction $x \mapsto f(x) + x$ en $-\infty$.
Attention! Que vaut $\sqrt{x^2}$?
 (d) En déduire que la courbe représentative de f admet des asymptotes en $\pm\infty$ dont on précisera les équations.
3. (a) Écrire f sous la forme $u \circ v$, où u et v sont des fonctions à préciser.
 (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer f' .
 (c) Déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer la courbe représentative de f . On fera apparaître la tangente horizontale et les asymptotes.

Exercice 3 (Des complexes et des fonctions).**1. Questions préliminaires :**

- (a) Énoncer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.
- (b) Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction. Donner la définition de f est une bijection de I sur J .
2. (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $1 + e^{i\theta} \neq 0$.
 Pour tout $\theta \in \mathcal{D}$, on pose $z_\theta = \frac{1}{1 + e^{i\theta}}$.
 (b) Montrer que : $\forall \theta \in \mathcal{D}, |z_\theta| \geq \frac{1}{2}$.
 (c) Soit $\theta \in \mathcal{D}$. Calculer $\operatorname{Re}(z_\theta)$ et $\operatorname{Im}(z_\theta)$ en fonction de θ .
3. Soit $f : \theta \mapsto \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$.
 (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 (b) Étudier la parité de f .
 (c) Justifier que f est 2π -périodique.
 (d) Étudier les variations de f sur $[0, \pi[$.
 (e) Calculer : $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(\theta)}{\theta - \pi}$ et $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{\cos(\theta) + 1}{\theta - \pi}$.
 En déduire $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\theta)$.
 (f) Montrer que f est bijective de $] -\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$.
 On note g sa réciproque.
 (g) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis exprimer g' en fonction de g .
4. Prouver que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $z_\theta = \frac{1}{2} + iy$.

Exercice 4. 1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t) \geq 1$.

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} \in] -1, 1[$.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}\right) + \arctan(\operatorname{sh}(t)) = \frac{\pi}{2}$.