

Correction du Devoir Surveillé 02

Correction de l'exercice 1 :

- On lit sur le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions : $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$.
- On remarque tout d'abord que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
Puis, $(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{12} = \sqrt{2}^{12} e^{3i\pi} = -2^6$.
Donc $(1 + i)^{12} = -64$ et $\operatorname{Re}((1 + i)^{12}) = -64$ et $\operatorname{Im}((1 + i)^{12}) = 0$.
- On a $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Donc $|j| = 1$ et $\arg(j) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
 - $j^3 = (e^{2\pi i/3})^3 = e^{2i\pi} = 1$.
 $j^2 = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$, donc $j^2 + j = -1$.
 - Il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = 3\ell$. Donc $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^{3\ell} + j^{6\ell} = 1 + (j^3)^\ell + (j^3)^{2\ell}$. Ainsi, $1 + j^k + j^{2k} = 3$.
 - On a $1 + j^{3\ell+1} + j^{2(3\ell+1)} = 1 + (j^3)^\ell j + (j^3)^{2\ell} j^2 = 1 + j + j^2$. Donc $1 + j^{3\ell+1} + j^{2(3\ell+1)} = 0$.
- $z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $z = \frac{1-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$.
 - $|z|^2 = \frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} + \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{4} = \frac{1-2\sqrt{2}+2+3-2\sqrt{6}+2}{4} = \frac{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4}$.
Donc $|z| = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{2}$.
 - $z = 2ie^{i\frac{7\pi}{24}} \sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$.
 - Comme $\frac{\pi}{24} \in [0, \pi]$, $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) \geq 0$, donc d'après les deux questions précédentes, $|z| = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{2}$.
Ainsi, $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}}{4}$.
 - D'après la question 4c, $z = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\pi/2}e^{7i\pi/24}$, donc $\arg(z) \equiv \frac{19\pi}{24} [2\pi]$.
- Commençons par le signe de $x^2 - 4x + 3$: $\Delta = 16 - 12 = 4$, donc ce polynôme admet deux racines réelles $x_{\pm} = \frac{4 \pm 2}{2}$.
On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
x^2-4x+3	+	0	-	-	0	+
$x-2$	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2-4x+3}{x-2}$	-	0	+	-	0	+

Ainsi, f est définie sur $[1, 2] \cup [3, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Donc g est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
- h est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. f est dérivable en x ssi $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} > 0$. Donc f est dérivable sur $]1, 2[\cup]3, +\infty[$.

- $\frac{\ln(e^x + x)}{x - \ln(x)} = \frac{\ln(e^x) + \ln(1 + x/e^x)}{x(1 - \ln(x)/x)} = \frac{1}{1 - \ln(x)/x} + \frac{\ln(1 + x/e^x)}{x(1 - \ln(x)/x)}$. Or, $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

Donc $\frac{\ln(e^x + x)}{x - \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

(b) On factorise : $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3 \xrightarrow{x \rightarrow 2} -1$.

(c) On pose $f : x \mapsto e^x$. La fonction f est dérivable en 0, donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = e^0$. Donc $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

(d) $\frac{e^{3x} - e^x}{x - x^4} = \frac{e^{3x}}{x^4} \frac{1 - e^{-2x}}{-1 + \frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ par croissances comparées.

(e) $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Posons $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. La fonction f est dérivable en 0 donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = \frac{1}{1 + 0}$. Donc $(1 + x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^1 = e$.

(f) Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, donc $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$. Par encadrement, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

7. f est dérivable en a ssi le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque $h \rightarrow 0$.

8. (a) f est croissante sur I ssi $\forall x, y \in I$, si $x < y$ alors $f(x) \leq f(y)$.

(b) Soient $x, y \in I$ avec $x < y$. Comme f est croissante sur I , $f(x) \leq f(y)$. Comme g est décroissante sur J , $g(f(x)) \geq g(f(y))$.
Donc $g \circ f$ est décroissante sur I .

9. Il existe $M, M' \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$ et $|g(x)| \leq M'$.

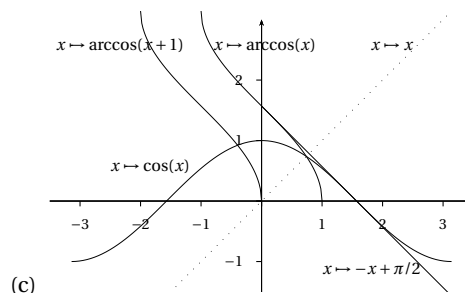
Alors pour tout $x \in I$, $|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + M'$ d'après l'inégalité triangulaire. Ainsi, comme $|f + g|$ est majorée, $f + g$ est bornée.

De même, pour tout $x \in I$, $|fg(x)| \leq MM'$, donc fg est majorée et fg est bornée.

10. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x^a = e^{a \ln(x)}$.

11. (a) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\pi/2$ est $y = -x + \pi/2$.

(b) La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.



Correction de l'exercice 2 :

1. (a) On développe $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - 2x \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$. On a bien l'égalité voulue.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. (a) On commence par réécrire $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$.

En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

(b) On utilise la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\ &= \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\ &= \frac{x \left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} \quad \text{car } x > 0 \\ &= \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\frac{1}{2}$.

(c) On procède de même pour $f(x) + x$, en faisant attention cette fois car $x < 0$:

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \sqrt{x^2 - x + 1} + x = \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} \\ &= \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} \\ &= \frac{x \left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1\right)} \quad \text{car } x < 0, \sqrt{x^2} = -x \\ &= \frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 = -2$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \frac{1}{2}$.

(d) **En $+\infty$** : d'après la question 2b, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$, donc la droite d'équation

$y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

En $-\infty$: d'après la question 2c, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + \frac{1}{2}\right) = 0$, donc la droite d'équation

$y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

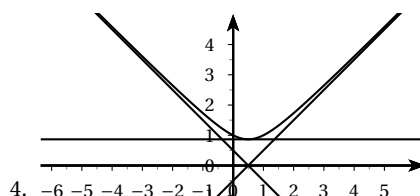
3. (a) On pose $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 - x + 1$. Alors $f(x) = u \circ v(x)$.

(b) Comme u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) \geq \frac{3}{4} > 0$, $u \circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x ,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

(c)

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$



Correction de l'exercice 3 :

1. (a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- (b) f est une bijection de I sur J ssi $\forall y \in J, \exists! x \in I \mid f(x) = y$.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = -1 \iff e^{i\theta} = e^{i\pi} \iff \theta \equiv \pi[2\pi]$.
Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \equiv \pi[2\pi]\}$.
- (b) Soit $\theta \in \mathcal{D}$. D'après l'inégalité triangulaire, $|1 + e^{i\theta}| \leq |1| + |e^{i\theta}| = 2$. Donc $|z_\theta| \geq \frac{1}{2}$.
- (c) $z_\theta = \frac{1 + e^{-i\theta}}{(1 + \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} = \frac{1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)}{1 + \cos^2(\theta) + 2 \cos(\theta) + \sin^2(\theta)} = \frac{1 + \cos(\theta) - i \sin(\theta)}{2(1 + \cos(\theta))} = \frac{1}{2} - i \frac{\sin(\theta)}{2(1 + \cos(\theta))}$.
Donc $\operatorname{Re}(z_\theta) = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im}(z_\theta) = -\frac{\sin(\theta)}{2(1 + \cos(\theta))}$.
3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta)$ est défini ssi $\cos(\theta) \neq -1 \iff \theta \not\equiv \pi[2\pi]$. Donc f est définie sur $\mathcal{D}$.
- (b) Soit $\theta \in \mathcal{D}$: $f(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{1 + \cos(-\theta)} = -\frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$ car $\sin$ est impaire et $\cos$ est paire. Donc f est impaire.
- (c) Soit $\theta \in \mathcal{D}$: $f(\theta + 2\pi) = \frac{\sin(\theta + 2\pi)}{1 + \cos(\theta + 2\pi)} = f(\theta)$ car $\sin$ et $\cos$ sont 2π -périodiques.
Donc f est 2π -périodique.
- (d) f est dérivable sur $]0, \pi[$ par opérations et pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $f'(\theta) = \frac{\cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) + \sin^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{2 + \cos(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2}$.
Or, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $\cos(\theta) \geq -1$, donc $2 + \cos(\theta) > 0$ et $f'(\theta) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, \pi[$.
- (e) La fonction $g : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en π donc $\frac{g(\theta) - g(\pi)}{\theta - \pi} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} g'(\pi) = \cos(\pi)$. Donc $\frac{\sin(\theta)}{\theta - \pi} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} -1$.
De même $\cos$ est dérivable en π et $\frac{\cos(\theta) + 1}{\theta - \pi} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} 0^-$.
Ainsi, $f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta - \pi} \frac{\theta - \pi}{1 + \cos(\theta)} \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} +\infty$.
- (f) Comme f est impaire, elle est strictement croissante sur $] -\pi, \pi[$. f est continue sur $] -\pi, \pi[$. D'après le théorème de la bijection monotone, f est une bijection de $] -\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$ (d'après la limite de la question précédente).
- (g) Comme la dérivée de f ne s'annule pas sur $] -\pi, \pi[$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{(1 + \cos(g(x)))^2}{2 + \cos(g(x))}$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$. D'après la question 3f, il existe un unique $\theta \in] -\pi, \pi[$ tel que $f(\theta) = -2y$. Or, $z_\theta = \frac{1}{2} - i \frac{1}{2} f(\theta) = \frac{1}{2} + iy$.
Ainsi, il existe $\theta \in \mathcal{D}$ tel que $z_\theta = \frac{1}{2} + iy$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(t) = 1 + \operatorname{sh}^2(t) \geq 1$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$. Or $-e^t - e^{-t} < e^t - e^{-t} < e^t + e^{-t}$, car l'exponentielle est toujours strictement positive. Donc $-1 < \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)} < 1$.
3. Soit $f : t \mapsto \arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}\right) + \arctan(\operatorname{sh}(t))$.
Comme $\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après la question précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -\frac{\frac{\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}}} + \frac{\operatorname{ch}(t)}{1 + \operatorname{sh}^2(t)} = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t)}{\operatorname{ch}^2(t)}}} + \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} = -\frac{1}{\operatorname{ch}(t)} + \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} = 0$.
Donc f est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $f(0) = \arccos(0) + \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \arccos\left(\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}\right) + \arctan(\operatorname{sh}(t)) = \frac{\pi}{2}$.