

Exercice 6:

① $-0^2 > 3$ X

$1^2 \leq 7$

$2^2 \leq 11$

$3^2 \leq 15$

$4^2 \leq 19$

$\rightarrow n=5$ $25 > 23$

Montrons par réc sur $n \geq 5$ que $n^2 > 4n+3$

I: Pour $n=5$, $5^2 = 25$ et $4 \times 5 + 3 = 23$
Donc $5^2 > 4 \times 5 + 3$

H: Soit $n \geq 5$. Si $n^2 > 4n+3$ alors $(n+1)^2 > 4(n+1)+3$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\text{et } n^2 > 4n+3 \text{ par H.R.}$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 4n+3 + 2n+1 = 4n+4 + 2n = 4(n+1) + 2n$$

$$\text{Or } n \geq 5 \text{ donc } 2n \geq 10 \text{ et } 2n \geq 3$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 4(n+1) + 3.$$

On conclut la récurrence donc, $\forall n \geq 5, n^2 > 4n+3$

③ Pour $n \geq 1$ on pose $(f^{(1)} = f, f^{(2)} = f'')$

$\mathcal{P}_n: \ll f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}^k \text{ et}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^k, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \gg$

I: Pour $n=1$ - f est dér sur $\mathbb{R}^*$ par qd

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(1)}(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ car } (-1)^1 \frac{1!}{x^{1+1}} = -\frac{1}{x^2}.$$

Donc P_1 est vraie

H: Soit $n \geq 1$. Si P_n est vraie. V. P_{n+1} est vraie.

Pour $n \in \mathbb{R}$, f est n fois dér sur $\mathbb{R}^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
 $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$

Or $f^{(n)}$ est dér sur $\mathbb{R}^*$ par qd. Donc f est dér $n+1$ fois sur $\mathbb{R}^*$.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)} x^{-1} x^{-(n+2)} \\ = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

D'après le principe de réc., $\boxed{\forall n \geq 1, P_n \text{ est vraie.}}$

$$[-1, +\infty[= \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$$

⑤ Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $P_n: \ll \forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx \gg$

I: Pour $n=0$:

$$\text{Soit } x \in [-1, +\infty[: (1+x)^0 = 1 \text{ car } 1+0 \cdot x = 1$$

$$\text{Donc } (1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x.$$

Donc P_0 est vraie.

H: Soit $n \in \mathbb{N}$. Si P_n est vraie. V. P_{n+1} est vraie.

$$\text{Soit } x \in [-1, +\infty[$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$$

$$\text{Or } (1+x)^n \geq 1+nx \text{ par H. et } 1+x \geq 0$$

$$\text{Donc } (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ \text{et } (1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$$

On $nx \geq 0$

donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x + nx^2 \geq 1+(n+1)x$.

Mais P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de réc., $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1+nx}$