

Un peu de logique - Exercices

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

- | | | |
|--------------------|--------------------------------|----------------------|
| 1. n est pair. | 3. n divise 1000. | 5. n est un carré. |
| 2. n est impair. | 4. n est une puissance de 2. | |

Exercice 2. Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

- | | |
|--|--|
| 1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid p = n^2$ | 3. $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{N}, p = n^2$ |
| 2. $\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, p = n^2$ | 4. $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$ |

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier et donner leur négation à chaque fois.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ | 3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$ | 5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$. |
| 2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$ | 4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$ | |

Exercice 4. 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.
Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 2^{n+2} + 3$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$.
Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n > 0$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n < 2$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
Montrer par récurrence sur n que $u_n = n^2 + n$.

Exercice 5. 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer par récurrence sur n que $u_n = 2^n + 3^n$.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer par récurrence sur n que $u_n = 1 + 2^n$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $u_n \leq 2^{n-1}$.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = n^{-n}(u_1 + u_2^2 + u_3^3 + \dots + u_n^n)$.
Montrer par récurrence sur n que $0 < u_n \leq 1$.

Exercice 6. 1. Montrer par récurrence sur n que $n^2 > 4n + 3$ à partir d'un certain rang à déterminer.

2. Soient z et z' deux nombres complexes.

(a) Montrer que $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$

(b) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. On note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f , c'est-à-dire la fonction obtenue en dérivant successivement n fois f .

Démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{x^{n+1}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x \in [-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Indications - Solutions

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

- | | |
|--|---|
| 1. n est pair : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k$. | 4. n est une puissance de 2 : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2^k$. |
| 2. n est impair : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1$. | |
| 3. n divise 1000 : $\exists k \in \mathbb{N} \mid kn = 1000$. | 5. n est un carré : $\exists k \in \mathbb{N} \mid n = k^2$ |

Exercice 2 :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} \mid p = n^2$: vrai. Prenons $n \in \mathbb{N}$. On pose $p = n^2$ qui vérifie bien $p = n^2$.
- $\exists p \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, p = n^2$: faux. On montre que le contraire est vrai. Soit $p \in \mathbb{N}$. Prenons $n = p + 2$. Alors $n > 1$ et $n > p$, donc $n^2 > p$.
- $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall p \in \mathbb{N}, p = n^2$: faux. On montre le contraire. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $p = n^2 + 1$. Alors $p > n^2$.
- $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \mid p = n^2$: faux. Prenons $p = 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $n = 0$ ou $n = 1$ et alors $n^2 < p$, soit $n \geq 2$ et $n^2 \geq 4 > p$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq p$.

Exercice 3 :

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$: FAUX, négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$: VRAI, négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
- $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$: FAUX, négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$: FAUX, négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$: FAUX, négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.

Exercice 4 :

- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 7$ et $2^{0+2} + 3 = 4 + 3 = 7$, donc la propriété est vérifiée.
 - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n = 2^{n+2} + 3$. Alors $u_{n+1} = 2u_n - 3 = 2(2^{n+2} + 3) - 3 = 2^{n+3} + 3$, donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = \frac{1}{2} > 0$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n > 0$. Alors $3u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$, donc $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} > 0$ et la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 < 2$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $0 < u_n < 2$. Alors $1 < u_n + 1 < 3$, et $\sqrt{1} < \sqrt{u_n + 1} < \sqrt{3}$ par stricte croissance de la racine carrée. Or $\sqrt{1} > 0$ et $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. Donc $0 < u_{n+1} < 2$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = 0 = 0^2 + 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n = n^2 + n$. Alors $u_{n+1} = u_n + 2n + 2 = n^2 + n + 2n + 2 = (n + 1)^2 + n + 1$, donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Exercice 5 : On procède par récurrence double pour les 3 premières et forte pour la dernière.

- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $2^0 + 3^0 = 2$. Pour $n = 1$, $u_1 = 5$ et $2^1 + 3^1 = 5$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n = 2^n + 3^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Alors $u_{n+2} = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) = (10 - 6)2^n + (15 - 6)3^n = 2^{n+2} + 3^{n+2}$, donc la propriété est vraie au rang $n + 2$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $1 + 2^0 = 2$. Pour $n = 1$, $u_1 = 3$ et $1 + 2^1 = 3$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Alors $u_{n+2} = 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) = 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2^{n+1}$.
- Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = 1 \leq 2^{1-1} = 1$. Pour $n = 2$, $u_2 = 2 \leq 2^{2-1} = 2$.
 - Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons que $u_n \leq 2^{n-1}$ et $u_{n+1} \leq 2^n$. Alors $u_{n+2} \leq 2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}(2 + 1) \leq 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n + 2$.
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $0 < u_0 = 1 \leq 1$.
 - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 < u_k \leq 1$. Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 < u_k^k \leq 1$, donc $0 < u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n \leq n$, puis $0 < u_{n+1} \leq n^{-n-1}$. Comme $n \geq 1$, $-(n + 1) \leq -2$ et $n^{-n-1} \leq 1^{-n-1} = 1$. Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Exercice 6 :

- Initialisation : Pour $n = 5$, $5^2 = 25$ et $4 \times 5 + 3 = 23$, donc la propriété est vraie au rang 5.

- Hérédité : soit $n \geq 5$ et supposons que $n^2 > 4n + 3$. Alors $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 4n + 3 + 2n + 1 = 4(n+1) + 2n > 4(n+1) + 3$, car $n \geq 5$. La propriété est vraie au rang $n+1$.
2. Voir le cours pour la première partie.
- Initialisation : pour $n = 0$, $\overline{z^0} = 1$ et $\overline{z^0} = 1$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Alors $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n z} = \overline{z^n} \overline{z} = \overline{z}^n \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$ en utilisant la question précédente et l'HR.
- 3.
- Initialisation : Pour $n = 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \frac{1}{x^{1+1}}$.
 - Hérédité : soit $n \geq 1$ et supposons que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{x^{n+1}}$. En dérivant, on trouve : $f^{(n+1)}(x) = -(n+1)(-1)^n \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{x^{n+2}}$, ce qui donne la formule voulue.
- 4.
- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $|\sin(0x)| = 0$ et $0 \times |\sin(x)| = 0$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que $|\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$. Alors $|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| = (n+1)|\sin(x)|$ en utilisant $|\cos(nx)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$.
- 5.
- Initialisation : pour $n = 0$, on prend $x \in [-1, +\infty[$. Alors $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$.
 - Hérédité : soit $n \geq 0$ et supposons que : $\forall x \in [-1, +\infty[$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Soit $x \in [-1, +\infty[$. Alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$ car $1+x \geq 0$. Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ car $nx^2 \geq 0$.