Chapitre 5 : Sommes et produits

I. Manipulations de somme et de produits

I.1. Notations et exemples

Définition 1. Soit I un ensemble fini et non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I. On note $\sum_{i\in I} a_i$ (resp. $\prod_{i\in I} a_i$) la somme (resp. le produit) de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
Si I est l'ensemble vide, on convient que $\sum_{i\in I} a_i$ vaut 0 et $\prod_{i\in I} a_i$ vaut 1.

Remarque I.1. L'indice i est muet et n'existe que dans la somme/le produit. On peut donc le remplacer par un autre symbole qui n'est pas utilisé ailleurs. Il n'apparaît pas forcément non plus dans la somme/le produit.

Notation I.1. Si $I = [\![p, q]\!]$, on notera alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q = \sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{p\leq i\leq q} a_i.$$

Remarque I.2. Dans la somme $\sum_{k=p}^{q} a_k$, il y a ..... termes.

Exemple I.1.
- La somme des n premiers entiers strictement positifs s'écrit :
- La somme des huit premières puissances de 2 s'écrit :
- $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} =$ .....
- Le produit $\prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times\cdots\times n$ se note aussi $n!$ et se lit « **factorielle** n ». On prend comme convention que $0! = 1$.

Exemple I.2. On a :

$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$

$\sum_{j=1}^{n} j^2 =$

Mais : $\sum_{i=1}^{n} k^2 =$

Exercice 1. 1. Écrire chacune des expressions suivantes avec le signe $\sum$:

(a) $5a_1 + 5a_2 + 5a_3 + 5a_4 =$

(b) $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n} =$

(c) $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 =$

(d) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_dx^d =$

(e) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 =$

(f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} =$

(g) $2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12} =$

(h) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024} =$

(i) $2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50 =$

(j) $q - q^2 + q^3 - q^4 + q^5 - \cdots + q^{31} =$

(k) $a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} =$

2. Écrire chacune des expressions suivantes sans le signe $\sum$ ou $\prod$:
   (a) $\sum_{k=1}^{8} 1 =$
   (b) $\sum_{j=0}^{4} \frac{1}{2} =$
   (c) $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k =$
   (d) $\sum_{k=0}^{5} a_{3k+1} =$
   (e) $\prod_{k=1}^{n} x =$
   (f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} =$
   (g) $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} =$
   (h) $\frac{5!}{4!} =$
   (i) $\frac{n!}{k!(n-k)!} =$

I.2. Linéarité, relation de Chasles et autres propriétés

Exemple I.3.

- Lorsqu'on ajoute toujours le même nombre :

$$\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ terms}} = na.$$

- Lorsqu'on sort un terme :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = a_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots) + a_n$$

- Lorsque on somme une somme :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

- Lorsqu'on a un facteur commun :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \dots + a_n) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

- Un télescopage :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = \cancel{a_2} - a_1 + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cancel{a_4} - \cancel{a_3} + \dots + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_1 -$$

Proposition 1.

1. $\sum_{k=p}^{q} a = a(q-p+1)$; nb de terms,
2. $\sum_{k=p}^{q} a_k = a_p + \sum_{k=p+1}^{q} a_k$;
3. $\sum_{k=p}^{q} a_k = a_q + \sum_{k=p}^{q-1} a_k$;
4. $\sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k = \sum_{k\in I} (a_k + b_k)$ *(linéarité)* ;
5. $\sum_{k\in I} \lambda a_k = \lambda \sum_{k\in I} a_k$ *(homogénéité)* ;
6. $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$ *(téléscopage)* ;
7. $\sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{r} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k$ *(Chasles)* ;
8. $\left| \sum_{k=p}^{q} a_k \right| \leq \sum_{k=p}^{q} |a_k|$ *(Inégalité triangulaire).*

Proposition 2.

1. $\prod_{k=p}^{q} a = a^{q-p+1}$;
2. $\prod_{k=p}^{q} a_k \prod_{k=p}^{q} b_k = \prod_{k=p}^{q} (a_k b_k)$;
3. $\prod_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda^{q-p+1} \prod_{k=p}^{q} a_k$;
4. $\prod_{k=p}^{q} (a_k)^m = \left(\prod_{k=p}^{q} a_k\right)^m$;
5. $\left|\prod_{k=p}^{q} a_k\right| = \prod_{k=p}^{q} |a_k|$;
6. $\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$ *(téléscopage)* ;
7. $\prod_{k=p}^{q} a_k \times \prod_{k=q+1}^{r} a_k = \prod_{k=p}^{r} a_k$ *(Chasles)*.

Exemple I.4.

- Le produit des nombres pairs de 2 à $2n$ vaut : $\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^{n-1+1} \prod_{k=1}^{n} k = \boxed{2^n \times n!}$
- Le produit des nombres impairs de 1 à $2n+1$ vaut : $\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} = \boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$$

Exercice 2.

1. Calculer :

$\sum_{i=1}^{9} i = 1+2+3+\dots+7+8+9 = 45$

$\sum_{i=1}^{9} 2i = 2\sum_{i=1}^{9} i = 90$

$\sum_{k=1}^{9} (3k-5) = \sum_{k=1}^{9} 3k - \sum_{k=1}^{9} 5 = 3\sum_{k=1}^{9} k - 9 \times 5 = 90$

$\sum_{j=1}^{9} \frac{j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{9} j = \boxed{\frac{45}{2}}$

2. Calculer :

$\sum_{k=1}^{4} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2+4+8+16 = 30$

$\sum_{i=1}^{4} 3^i = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 3+9+27+81 = 120$

$\sum_{j=1}^{4} (2^j + 3^j) = \sum_{j=1}^{4} 2^j + \sum_{j=1}^{4} 3^j = 30 + 120 = \boxed{150}$

$\sum_{l=1}^{4} (2^{l+1} + 1) = \sum_{l=1}^{4} 2^{l+1} + \sum_{l=1}^{4} 1 = \sum_{l=1}^{4} (2 \times 2^l) + 4 = 2\sum_{l=1}^{4} 2^l + 4 = 64$

3. Calculer :

$\sum_{k=0}^{3} k = 0+1+2+3 = 6$

$\sum_{k=0}^{3} k^2 = 0+1+4+9 = 14$

$\left(\sum_{k=0}^{3} k\right)^2 = 6^2 = 36$

$\left(\sum k\right)^2 \neq \sum k^2$

$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

4. Calculer :

$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \cancel{1^2} + \cancel{2^2} + \dots + n^2 - (0^2 + \cancel{1^2} + \dots + \cancel{(n-1)^2}) = \boxed{n^2} = n^2 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} k^2} - \left(0^2 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} k^2}\right)$

$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} = \underset{k=1}{\frac{1}{1}} + \underset{k=n}{\frac{1}{n}} + \underset{k=n+1}{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}} - \cancel{\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}} = \boxed{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}$

I.3. Changement d'indice

Proposition 3. *Soient $p \leq q$ deux entiers naturels, $N \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On a*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+N}^{q+N} a_{k-N} \text{ et } \prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{k=p+N}^{q+N} a_{k-N}$$

et

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{q-k}$$

$\sum_{i=0}^{q-p} a_{q-i}$

$k = q-i$

⚠ On pose pas $i = 2k \to$ $i = \frac{k}{2} \notin \mathbb{N}$

Exemple I.5. En pratique, on peut poser le changement d'indice pour ne pas se tromper.

- Pour modifier la somme $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2$, on pose $i = k+1$. Alors lorsque $k = 0$, on a $i = 1$ et lorsque $k = n$, $i = n+1$

  Donc $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2$

- Considérons la somme $\sum_{k=0}^{n} k$ et posons $i = n-k$. Lorsque $k = 0$, $i = n$ et lorsque $k = n$, $i = 0$, de sorte que

$$S = \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{i=0}^{n} (n-i) = \sum_{i=0}^{n} n - \sum_{i=0}^{n} i = (n+1)n - \sum_{i=0}^{n} i$$

$i = n-k \iff k = n-i$

$S = n(n+1) - S$

Donc $2\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$

k	$i = 5-k$
2	3
5	0

Exercice 3. Compléter les expressions suivantes en terminant les changements d'indice :

1. $\sum_{k=2}^{5} a_k = \sum_{i=0}^{3} a_{5-i}$

   $k = 5-i \iff i = 5-k$

2. $\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{j=1}^{n+1} x_{k+1}$

k	$j = k+1$
0	1
n	$n+1$

3. $\sum_{k=p+1}^{q+1} a_k = \sum_{i=p}^{q} a_{i+1}$

k	$i = k-1$
$p+1$	p
$q+1$	q

$k = i+1$

4. $\sum_{k=n+1}^{2n} x_k = \sum_{l=1}^{n} x_{n+l}$

k	$l = k-n$
$n+1$	1
$2n$	n

$k = n+l$

5. $\sum_{i=3}^{n} u_{i+2} = \sum_{k=5}^{n+2} u_k$

i	$k = i+2$
3	5
n	$n+2$

6. $\sum_{j=3}^{n+2} u_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} u_{i+3}$

j	$i = j-2$
3	1
$n+2$	n

$j = i+2$

7. $\sum_{k=4}^{n-1} a_k = \sum_{i=1}^{n-4} a_{i+3}$

a_4 a_{n-1} a_4 a_{n-1}

1er terme

k	$i = k-3$
4	1
$n-1$	$n-4$

$k = i+3$

$\sum_{i=0}^{n} n = n + n + \dots + n$

$n+1$

Exercice 4. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} =$

2. $\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) =$

3. $\sum_{i=0}^{n+2} a_i + \sum_{j=1}^{n+1} a_j - 2\sum_{k=2}^{n+1} a_k =$

4. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) =$

5. $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right) =$

6. $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)} b^{k+1} =$

1. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}-\left(\frac{1}{n+1}+\cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}\right)$$

$$=\boxed{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{1}+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n-1}}+\cancel{\frac{1}{n}}-\left(\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n-1}}+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\boxed{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}}-\left(\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n-1}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

2. $$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}$$

k	$i=k-1$
2	1
n	$n-1$

$i=k-1$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}$$

$i=k+1$

k	$i=k+1$
2	3
n	$n+1$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cancel{\sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{i}}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cancel{\sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{i}}\right)$$

$$=\boxed{\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

$$\sum_{i=0}^{n+2}a_i+\sum_{j=1}^{n+1}a_j-2\sum_{k=2}^{n+1}a_k=a_0+a_1+a_{n+2}+\cancel{\sum_{i=2}^{n+1}a_i}+a_1+\cancel{\sum_{j=2}^{n+1}a_j}-\cancel{2\sum_{k=2}^{n+1}a_k}$$

$$=\boxed{a_0+2a_1+a_{n+2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)$$

$$=\cancel{\ln(2)}-\underbrace{\ln(1)}_{=0}+\cancel{\ln(3)}-\cancel{\ln(2)}+\cancel{\ln(4)}-\cancel{\ln(3)}+\dots+\ln(n+1)-\cancel{\ln(n)}$$

$$=\boxed{\ln(n+1)}$$

5. $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}$$

$i=n+1-k$

k	i
1	n
n	1

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \boxed{0}.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)} b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b^i$$

$i = k+1$

k	i
0	1
$n-1$	n

$$= a^{n-0} b^0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k} - \left(a^{n-n} b^n + \cancel{\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} b^i} \right)$$

$$= \boxed{a^n - b^n}.$$

CHAPITRE 5 : Sommes et produits

II – Sommes de référence :

1) Égalité de Bernoulli :

Rq : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Prop : $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \end{aligned}}$$

(*)

En particulier :

$\forall x \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$.

ex : ① $n = 1$: $a - b = (a-b) \sum_{k=0}^{0} a^{1-1-k} b^k = (a-b)$

$n = 2$: $a^2 - b^2 = (a-b) \sum_{k=0}^{1} a^{1-k} b^k = (a-b)(a+b)$

$n = 3$: $a^3 - b^3 = (a-b) \sum_{k=0}^{2} a^{2-k} b^k = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$n = 4$: $a^4 - b^4 = (a-b) \sum_{k=0}^{3} a^{3-k} b^k = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

② Soit $x \in \mathbb{C}$.

$$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$$

Si $\rightarrow 1 + x^3 = 1 - (-x)^3 = 1 - (-x)^3 = (1-(-x))(1+(-x)+(-x)^2)$
puissance impaire. $= (1+x)(1-x+x^2)$.

⚠ $1+x^n$??? $-x^n + (-x)^n = x^n$. $\rightarrow$ marche pas !

③ Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} - 2^n = (3^2)^n - 2^n$

$= 9^n - 2^n$

$= (9-2)(\underbrace{9^{n-1} + 9^{n-2} \times 2 + \dots + 2^{n-1}}_{})$

$= 7 \times \underline{k}$ $\in \mathbb{N}$.

Donc 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

④ : Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = a \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k - b \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a \times a^{n-1-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b \times b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^{k+1}$$

$i = k+1$ $\quad$ $i - 1 = k$

k	$i = k+1$
0	1
$n-1$	n

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k - \sum_{i=1}^{n} a^{\overbrace{n-1-(i-1)}^{n-i}} b^i$$

$$= a^{n-0} b^0 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k} b^k} - \left(a^{n-n} b^n + \cancel{\sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} b^i}\right)$$

$$= a^n - b^n$$

Corollaire : Soit (u_n) une suite géo de raison $\boxed{q \neq 1}$. Pour tous $p, d \in \mathbb{N}$ avec $p \leq d$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{d} u_k = u_p \frac{1 - q^{d-p+1}}{1-q}}$$

1er terme $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$

$\dfrac{1^{er} - \text{suivant}}{1 - \text{raison}} = \dfrac{u_p - u_{d+1}}{1-q}$.

En particulier : $\displaystyle\sum_{k=p}^{d} q^k = q^p \frac{1 - q^{d-p+1}}{1-q}$

Rp: Si $\underline{q=1}$: $\sum_{\ell=p}^{d} 1 = d-p+1$.