

Contrôle de cours 4 - Fonctions / Logique - Sujet A

Mardi 6 octobre 2026

Question 1 (3 pts)

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires :

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
 La fonction arctan est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 et $\forall x \in I, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$
 La fonction arccos est dérivable sur $J =]-1, 1[$
 et $\forall x \in J, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$
 La fonction arcsin est dérivable sur $K =]-1, 1[$
 et $\forall x \in K, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Question 2 (1pt)

$$\arctan\left(\tan \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

□

Question 3 (2 pts)

1. On veut démontrer une assertion qui commence par $\forall x \in E$, que fait-on en premier?
On fixe $x \in E$.
2. On veut démontrer une assertion qui commence par $\exists x \in E$, que doit-on faire?
On doit trouver un exemple de $x \in E$ qui fonctionne.

□

Question 4 (2 pts)

Vrai ou faux? Justifier!

1. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$
FAUX! En effet, $x = 1 \in \mathbb{N}$ est un contre-exemple car $x^2 = 1 \leq 7$.
2. $\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x + 1 = 0$
VRAI! En effet, $x = -\frac{1}{2}$ convient.

□

Question 5 (2 pts)

Écrire avec des quantificateurs : il existe un réel plus grand que tous les autres.

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$$

Écrire la négation de : $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R} \mid y - x \leq 2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \mid y - x > 2$$

□

Question 6 (2 pts)

1. Pour chaque affirmation, cocher la case correspondante (aucune justification n'est demandée).

1. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\arcsin(\sin(x)) = x$. ☐ Vrai ☒ Faux

2. Pour tout $\theta \in [-1, 1]$, $\cos(\arccos(\theta)) = \theta$. ☒ Vrai ☐ Faux

3. La dérivée de $x \mapsto \pi^x$ est $x \mapsto x\pi^{x-1}$. ☐ Vrai ☒ Faux

4. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On a $\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$. ☐ Vrai ☒ Faux

□

Question 7 (3 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 5u_n - 4$. Démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 5^n$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 5^n$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $1 - 5^0 = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 1 - 5^n$. Montrons que $u_{n+1} = 1 - 5^{n+1}$.
On a $u_{n+1} = 5u_n - 4$, donc par HR, $u_{n+1} = 5(1 - 5^n) - 4 = -5^{n+1} + 1$. La formule est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 5^n$. □

Contrôle de cours 4 - Fonctions / Logique - Sujet B

Mardi 6 octobre 2026

Question 1 (3 pts)

Domaine de définition, de dérivabilité et dérivées des fonctions réciproques des fonctions circulaires :

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
 La fonction arctan est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 et $\forall x \in I, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$
 La fonction arccos est dérivable sur $J =]-1, 1[$
 et $\forall x \in J, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$
 La fonction arcsin est dérivable sur $K =]-1, 1[$
 et $\forall x \in K, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Question 2 (1pt)

$$\arctan\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

□

Question 3 (2 pts)

1. On veut démontrer une assertion qui commence par $\forall x \in E$, que fait-on en premier?
On fixe $x \in E$.
2. On veut démontrer une assertion qui commence par $\exists x \in E$, que doit-on faire?
On doit trouver un exemple de $x \in E$ qui fonctionne.

□

Question 4 (2 pts)

Vrai ou faux? Justifier!

1. $\exists x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 7$
VRAI! $x = 3$ convient car $x^2 = 9 > 7$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
FAUX! Par exemple, pour $x = 0$ on a $2x + 1 = 1 \neq 0$.

□

Question 5 (2 pts)

1. Écrire avec des quantificateurs : il existe un réel plus petit que tous les autres.
 $\exists x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$

2. Écrire la négation de : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} \mid x^2 - y > 2$.
 $\exists x \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall y \in \mathbb{R}, x^2 - y \leq 2$

Question 6 (2 pts)

Pour chaque affirmation, cocher la case correspondante (aucune justification n'est demandée).

1. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$. ☒ Vrai ☐ Faux
 2. Pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\arcsin(\theta)) = \theta$. ☐ Vrai ☒ Faux
 3. La fonction $x \mapsto x^\pi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. ☐ Vrai ☒ Faux
 4. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a > 0$. On a $\arg(z) \equiv \arctan\left(\frac{a}{b}\right) [2\pi]$. ☐ Vrai ☒ Faux
-

Question 7 (3 pts)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 4u_n - 3$. Démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 4^n$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = 1 - 4^n$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $1 - 4^0 = 0 = u_0$, donc la propriété est vraie pour le rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n = 1 - 4^n$. Montrons que $u_{n+1} = 1 - 4^{n+1}$.
 On a $u_{n+1} = 4u_n - 3$, donc par HR, $u_{n+1} = 4(1 - 4^n) - 3 = 1 - 4^{n+1}$. La formule est vraie au rang $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 4^n$. □