

Applications des nombres complexes - Exercices

I. Équations

Exercice I.1. Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de :

- a) e^{2i} ; b) $3+4i$; c) $7-24i$; d) $-15+8i$; e) $9+40i$

Exercice I.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $iz^2 + 3z - 2i = 0$
- $z^2 + 3iz + 4 = 0$
- $z^2 + (1+i)z + 1 - i = 0$
- $(2z^2 - 3z + 2)^2 + (z^2 - 3z + 2)^2 = 0$
- $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$
- $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

Exercice I.3. * Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + z^2 + (-1 + 3i)z + 44 + 12i = 0$, sachant que celle-ci admet une racine réelle.

Exercice I.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1-i}$ et $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice I.5. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- a) $(z-i)^4 = 1$; b) $(z-1)^4 = (z+1)^4$

Exercice I.6. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

- a) $z^8 - (2i\sqrt{3} - 2)z^4 - 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$; b) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$.

Exercice I.7. Résoudre :

- a) $z^n = (z+1)^n$; b) $(1+iz)^{2n} = (1-iz)^{2n}$; c) $* z^7 = \left(\frac{1}{z^2}\right)$.

Exercice I.8. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Formez une équation du second degré dont les racines sont $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$. La résoudre.
2. En déduire une valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
3. Calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
4. On considère dans le plan complexe le point B d'affixe i et le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$. Le cercle de centre Ω passant par B rencontre l'axe $x'Ox$ en I et J . Calculez les abscisses des points I et J .
5. En déduire une construction à la règle et au compas, que l'on explicitera soigneusement, du pentagone régulier dont les sommets sont les images des racines cinquième de l'unité.

Exercice I.9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants. On pourra introduire $S = x + y$ et $P = xy$.

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = -1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \quad \left| \quad 2. \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \left| \quad 3. \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \right.$$

II. Géométrie

Exercice II.1. Soient $A(2+4i)$ et $B(8+i)$. Montrer que le triangle OAB est rectangle.

Exercice II.2. On considère les points $A(1 + i)$ et $B(-2 + 3i)$.

- Déterminer l'affixe du point E tel que le triangle ABE soit un triangle équilatéral direct.
- Déterminer les affixes des points C et D tels que $ABCD$ soit un carré direct.

Exercice II.3. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Soient A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b et c . Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct ssi $a + bj + cj^2 = 0$.
2. On prend maintenant ABC un triangle quelconque du plan. On construit à l'extérieur de ce triangle les trois triangles équilatéraux de bases $[AB], [AC]$ et $[BC]$. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice II.4. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant :

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| 1. $(2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2;$ | 3. $\begin{cases} i-z = 1 \\ 2-z = 2 \end{cases}$ | 5. $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ |
| 2. $ 1+i+z = 2$ | | 4. $ z = 1-z = \left \frac{1}{z} \right $ |

Exercice II.5. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z-2}{z+i}$.

1. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice II.6. 1. Déterminer une racine réelle, puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$$

2. Démontrer que les solutions sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice II.7. ** Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que :

1. $M(z), N(z^2)$ et $P(z^4)$ sont alignés.
2. $P(1), M(z)$ et $N(z^2)$ forment un triangle rectangle.
3. $M(z), N\left(\frac{1}{z}\right)$ et $P(-i)$ sont alignés.

Exercice II.8. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On considère l'équation $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation. On note A et B les points images des solutions.
2. Déterminer θ pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Exercice II.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. On note Ω le point image de ω dans le plan. On considère la transformation du plan qui à un point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ vérifiant

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

1. On prend $M \neq \Omega$. Justifier que $\Omega M = \Omega M'$ et que $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$.
2. Quelle est cette transformation du plan ?