(3) Résoudre sur $]-\infty;0[$, $xy'+y=0$.

$xy'+y=0$
$\iff y'+\frac{1}{x}y=0$ car $x\neq 0$.

$x<0$
$|x|=-x$

On pose $\alpha : x \mapsto \frac{1}{x}$ de primitive $A : x \mapsto \ln(|x|) = \ln(-x)$

L'ensemble des sol est : $\{x \mapsto Ke^{-\ln(-x)}, K\in\mathbb{R}\}$
$= \left\{x \mapsto \frac{K}{-x}, K\in\mathbb{R}\right\}$

2) Solution de l'équation avec second membre :

Prop : Soient y_1 et y_2 deux sol de

(CE_1) $y'+\alpha(t)y=\beta(t)$ sur I.

Alors y_2-y_1 est sol de (CH_1) : $y'+\alpha(t)y=0$.

En particulier si y_p est une sol. de (CE_1) alors l'ensemble des sol de (CE_1) est

$\{t \mapsto y_p(t)+y_H(t)$, avec y_H sol de $y'+\alpha(t)y=0\}$

Dém : y_2-y_1 est deriv. sur I par op. et

$\forall t\in I$, $(y_2-y_1)'(t)+\alpha(t)(y_2-y_1)(t)$

$= y_2'(t)-y_1'(t)+\alpha(t)y_2(t)-\alpha(t)y_1(t)$
$= \underbrace{y_2'(t)+\alpha(t)y_2(t)}_{=\beta(t)} - \underbrace{(y_1'(t)+\alpha(t)y_1(t))}_{=\beta(t)}$

$= \beta(t) - \beta(t)$ Car y_1 et y_2 sol de (CE_1)
$= 0$

Donc $y_2 - y_1$ est sol de (CH_1).

Soit $y : I \to \mathbb{K}$ dérivable.

→ Si y est sol de (CE_1). Alors $y - y_p$ est sol de (CH_1) : $y = y_p + \underbrace{y - y_p}_{\text{sol de } (CH_1)}$

→ Si $y = y_p + y_H$ avec y_H sol de (CH_1)

Alors $\forall t \in I$,

$y'(t) + a(t) y(t) = y_p'(t) + y_H'(t) + a(t) y_p(t) + a(t) y_H(t)$

$= \boxed{y_p'(t) + a(t) y_p(t)} + \boxed{y_H'(t) + a(t) y_H(t)}$

$= \beta(t) + 0$.

Donc y est sol de (CE_1).

ex : Résoudre sur $\mathbb{R}$, $y' + 2y = 1$. (E)

① Sol de $y' + 2y = 0$ (H)

On pose $a : t \mapsto 2$ de primitive $A : t \mapsto 2t$.

Les sol de (H) sont

$\{ t \mapsto K e^{-2t}, K \in \mathbb{R} \}$.

② On cherche y_p sol de $y' + 2y = 1$.

Avec $y_p : t \mapsto \frac{1}{2}$ $\quad y_p(t) = \frac{1}{2}$.

y_p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p'(t) + 2y_p(t)$

$= 0 + 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

③ L'ensemble des sol de (E) est

$\boxed{\{ t \mapsto \frac{1}{2} + K e^{-2t}, K \in \mathbb{R} \}}$.

3) Recherche de y_p :

Prop (principe de superposition) :

Si y_1 est sol de $(E_1) : y' + a(t)y = b_1(t)$

y_2 ..... $(E_2) : y' + a(t)y = b_2(t)$

Alors $y_1 + y_2$ ... $(E_{1+2}) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$.

Dém : $y_1 + y_2$ est bien dans $\mathcal{D}$ et

$\forall t \in I$, $(y_1 + y_2)'(t) + a(t)(y_1 + y_2)(t)$

$= y_1'(t) + y_2'(t) + a(t) y_1(t) + a(t) y_2(t)$

$= y_1'(t) + a(t) y_1(t) + y_2'(t) + a(t) y_2(t)$

$= b_1(t) + b_2(t)$.

ex : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $y' + 2y = 1 + e^x$ (E).

① $(E_1) : y' + 2y = 1$.

On a $y_1 : x \mapsto \frac{1}{2}$ est sol sur $\mathbb{R}$.

② $(E_2) : y' + 2y = e^x$

On cherche y_2 sol sous la forme :

$y_2 : x \mapsto P e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y_2'(x) + 2y_2(x) = P e^x + 2 P e^x$

$= 3 P e^x$.

Donc y_2 est sol de (E_2) si : $3P = 1 \Leftrightarrow P = \frac{1}{3}$.

$y_2 : x \mapsto \frac{1}{3} e^x$ est sol de (E_2).

L'ensemble des sol de (E) est :

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^x + K e^{-2x}, \ K \in \mathbb{R} \right\}.$$

Méthode pour trouver y_p :

(1) On cherche une sol. évidente : (sol constante, etc.)
Marche bien si (H) est à coeff cst ($a(t) = cste$)

- le second membre s'y simplifie :
$b(t) = cst,\ e^{\lambda t},$ polynôme

→ on cherche y_p sous la même forme que b, en faisant apparaître une constante.

ex : Résoudre $y' + 3y = 2x$, $y' + 3y = e^x$, $y' + 3y = e^{-3x}$.

(a) $(H)\ y' + 3y = 0$.

On pose $a : x \mapsto 3$ de primitive $A : x \mapsto 3x$.
L'ensemble des sol de (H) est $\{x \mapsto \lambda e^{-3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(2) On cherche y_1 sol de $(E_1) : y' + 3y = 2x$
sous la forme $y_1 : x \mapsto ax + b$ ← fonction affine
y_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ y_1'(x) + 3y_1(x) = a + 3ax + 3b$
$= 3ax + a + 3b$.

y_1 est sol de $(E_1) \iff \begin{cases} 3a = 2 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{9} \end{cases}$

Donc $y_1 : x \mapsto \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}$ est sol de (E_1).

(3) On cherche y_2 sol de $(E_2) : y' + 3y = e^x$
sous la forme : $y_2 : x \mapsto Pe^x$ ← cste × exp
y_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto Pe^x \to x \mapsto Pe^x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ y_2'(x) + 3y_2(x) = 4Pe^x$
y_2 est sol de $(E_2) \iff 4P = 1 \iff P = \frac{1}{4}$.

Donc $y_2 : x \mapsto \frac{1}{4}e^x$ est sol de (E_2)

(4) On cherche y_3 sol de $(E_3) : y' + 3y = e^{-3x}$ ← cste × exp
Sous la forme $y_3 : x \mapsto Px e^{-3x}$

Sol de l'éq (H).

y_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y_3'(x) + 3y_3(x) = P'e^{-3x} - 3Pxe^{-3x} + 3Pxe^{-3x}$

$= \boxed{P e^{-3x}}$

y_3 est solution de $(E_3) \Leftrightarrow P = 1$.

Donc $y_3 : x \mapsto x e^{-3x}$ est solution de (E_3).

L'ensemble des solutions de

(E_1) est : $\{ x \mapsto \frac{2}{3}x - \frac{2}{9} + Ke^{-3x}, K \in \mathbb{R} \}$

(E_2) est : $\{ x \mapsto \frac{1}{4}e^x + Ke^{-3x}, K \in \mathbb{R} \}$

(E_3) est : $\{ x \mapsto xe^{-3x} + Ke^{-3x}, K \in \mathbb{R} \}$.

II/ Variation de la constante :

En général on cherche y_p sous la forme

$y_p : t \mapsto \boxed{f(t)} e^{-A(t)}$ ($t \mapsto K e^{-A(t)}$ est sol de (H))

avec f dérivable sur I.

On dérive, on remplace : $y_p' : t \mapsto f'(t) e^{-A(t)} - \alpha(t) f(t) e^{-A(t)}$

y_p est sol de $(E) \Leftrightarrow \forall t \in I$, $y_p'(t) + \alpha(t) y_p(t) = \beta(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in I$, $f'(t)e^{-A(t)} - \alpha(t)f(t)e^{-A(t)} + \alpha(t)f(t)e^{-A(t)} = \beta(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in I$, $f'(t)e^{-A(t)} = \beta(t)$ $\Leftrightarrow \dots$ $f(t) = \frac{\beta(t)}{e^{-A(t)}}$

$\Leftrightarrow \forall t \in I$, $f'(t) = \beta(t) e^{A(t)}$

Ex : Résoudre sur $]0, +\infty[$: $y' - \frac{1}{x}y = e^x$ (E)

① (H) : $y' - \frac{1}{x}y = 0$.

On pose $\alpha : x \mapsto -\frac{1}{x}$ de primitive $A : x \mapsto -\ln|x| = \ln(x)$.

L'ensemble des sol de (H) est : $\{ x \mapsto Ke^{\ln(x)}, K \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x \mapsto \boxed{Kx}, K \in \mathbb{R} \}$

② On fait varier la constante : on cherche y_p sol de

(E) sous la forme $y_p : x \mapsto f(x)x$ avec $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $y_p'(x) = f'(x)x + f(x)$

y_p sol de (E) $\Leftrightarrow \forall x > 0$, $y_p'(x) - \frac{1}{x} y_p(x) = e^x$

$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $f'(x)x + f(x) - \frac{1}{x} x f(x) = e^x$

$\Leftrightarrow \forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} e^x$.

On prend $f : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} e^t dt$. ✳

et $y_p : x \mapsto x \int_1^x \frac{1}{t} e^t dt$ sol de (E).

L'ensemble des sol de (E) est : $\left\{ x \mapsto x \int_1^x \frac{1}{t} e^t dt + Kx, K \in \mathbb{R} \right\}$

Ex : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $y' + 2xy = \cos(x) e^{-x^2}$ (E)

① (H) : $y' + 2xy = 0$.

On pose $a : x \mapsto 2x$ de primitive $A : x \mapsto x^2$.

L'ensemble des sol de (H) est :

$\{ x \mapsto K e^{-x^2}, K \in \mathbb{R} \}$

② On fait varier la constante : on cherche y_p sol de (E) sous la forme $y_p : x \mapsto f(x) e^{-x^2}$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = f'(x) e^{-x^2} - 2x f(x) e^{-x^2}$

y_p sol de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) + 2x y_p(x) = \cos(x) e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) e^{-x^2} - 2x f(x) e^{-x^2} + 2x f(x) e^{-x^2} = \cos(x) e^{-x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x)$.

On prend $f : x \mapsto \sin(x)$

$y_p : x \mapsto \sin(x) e^{-x^2}$ sol de (E),

L'ensemble des sol de (E) est : $\left\{ x \mapsto \sin(x) e^{-x^2} + K e^{-x^2}, K \in \mathbb{R} \right\}$.

4) Problème de Cauchy :

Déf : On appelle problème de Cauchy un système :

$$\begin{cases} y' + \alpha(t)\, y = \beta(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ sont fixés.

LIPSCHITZ

Th (Cauchy-Lipschitz linéaire) :

Si $\alpha : I \to \mathbb{K}$ et $\beta : I \to \mathbb{K}$ sont continues par I et $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \alpha(t)\, y = \beta(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ (cond. initiale)

admet une seule solution sur I.

Rq : ① Si l'éq. est homogène, $y : t \mapsto 0$ est sol de l'éq homogène.

Si y est une autre sol de l'éq, alors y ne s'annule pas.

Sinon y et y auraient même cond. initiale donc seraient égales.

② Deux sol diff. d'une éq homogène ne sont jamais égales. (ni $g_1(t_0) = g_2(t_0)$)

Ex : Résoudre $(S) \begin{cases} y' - y = 1 \quad (E) \\ y(0) = 2. \end{cases}$

① (H) : $y' - y = 0$.

On pose $\alpha : t \mapsto -1$ de primitive $A : t \mapsto -t$.

L'ensemble des sol de (H) est $\{t \mapsto K e^t,\ K \in \mathbb{R}\}$.

② On cherche $y_p : t \mapsto p$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p'(t) - y_p(t) = -p$.

On prend $p = -1$. Donc $y_p : t \mapsto -1$ est sol de (E).

L'ensemble des sol de (E) est : $\{t \mapsto -1 + Ke^t,\ K \in \mathbb{R}\}$.

(3) y est sol de (S) $\Leftrightarrow$ $y : t \mapsto -1 + Ke^t$, $K \in \mathbb{R}$ et $y(0) = 2$.

$\Leftrightarrow$ $y : t \mapsto -1 + Ke^t$, $K \in \mathbb{R}$ et $-1 + K = 2$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{y : t \mapsto -1 + 3e^t}$