Contrôle de cours 6 - Primitives - Sujet A
Mardi 10 novembre 2026

Question 1 (3 pts)

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Donner la définition d'une primitive de f sur I.
   Une primitive de f sur I est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.
2. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$.
   (a) La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   (b) Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. □

Question 2 (6 pts)

1. Calculer en utilisant une IPP : $I = \int_{-1}^{0} (x+2)\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.
   On dérive $x+2$ et on intègre e^{3x} : $u = x+2$, $v' = \mathrm{e}^{3x}$, $u' = 1$ et $v = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$:
$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{0} uv' &= [uv]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'v \\ &= \left[(x+2)\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3} - \left[\frac{1}{9}\mathrm{e}^{3x}\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{2}{9}\mathrm{e}^{-3} + \frac{5}{9}. \end{aligned}$$
2. Calculer $J = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$.
   Lorsque $x = 0$, $t = 1$ et lorsque $x = 1$, $t = \mathrm{e}$. De plus, $x = \ln(t)$, donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{t}$. Donc $J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + \frac{1}{t}}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = [\arctan(t)]_1^{\mathrm{e}} = \arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}$. □

Question 3 (2 pts)

Soit f et g deux fonctions continues sur I et $a, b \in I$ et F une primitve de f sur I.
Pour chaque affirmation, cocher la case correspondante (aucune justification n'est demandée).

1. $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. ☐ Vrai ■ Faux
2. $x \mapsto \frac{1}{2}F(2x)$ est une primitive de $x \mapsto f(2x)$. ■ Vrai ☐ Faux
3. Si G est une primitive de f sur I avec $F(a) = G(a)$ alors $F = G$. ■ Vrai ☐ Faux
4. Sur $]1, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{1+\ln(x)}$. ■ Vrai ☐ Faux

. □

Question 4 (6 pts)

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} e^{2t}\cos(t)\mathrm{d}t$. On passe en complexe et on commence par calculer :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{2t}e^{it}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} e^{(2+i)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2+i}[e^{(2+i)t}]_0^{\pi}\\ &= \frac{1}{2+i}(e^{2\pi+i\pi}-1)\\ &= \frac{2-i}{5}(-e^{2\pi}-1)\\ &= \frac{-2(e^{2\pi}+1)+i(e^{2\pi}+1)}{5}.\end{aligned}$$

   Donc $I = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{2t}e^{it}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{-2(e^{2\pi}+1)}{5}$.

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 25-16 = 9$. Le polynôme a donc deux racines : -1 et -4. Donc $\frac{1}{x^2+5x+4} = \frac{1}{(x+1)(x+4)}$. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{(x+1)(x+4)} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-1/3}{x+4}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}[\ln(|x+1|)]_0^1 - \frac{1}{3}[\ln|x+4|]_0^1\\ &= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(5) + \frac{1}{3}\ln(4).\end{aligned}$$

□

Contrôle de cours 6 - Primitives - Sujet B
Mardi 10 novembre 2026

Question 1 (3 pts)

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Donner la définition d'une primitive de f sur I.
   Une primitive de f sur I est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.
2. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$.
   (a) La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   (b) Si F est une primitive de f sur I et $a, b \in I$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. □

Question 2 (6 pts)

1. Calculer en utilisant une IPP : $I = \int_{-1}^{0} (x+3)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
   On dérive $x+3$ et on intègre e^{2x} : $u = x+3$, $v' = \mathrm{e}^{2x}$, $u' = 1$ et $v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$:
$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{0} uv' &= [uv]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} u'v \\ &= \left[(x+3)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-2} - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{4}. \end{aligned}$$
2. Calculer $J = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{2t\ln(t)+t}$ en effectuant le changement de variable $x = \ln(t)$.
   Lorsque $t = 1$, $x = 0$ et lorsque $t = \mathrm{e}$, $x = 1$. De plus, $t = \mathrm{e}^x$, donc $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Donc $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{2\mathrm{e}^x x + \mathrm{e}^x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \frac{1}{2}[\ln(2x+1)]_0^1 = \frac{\ln(3)}{2}$. □

Question 3 (2 pts)

Soit f et g deux fonctions continues sur I, avec g qui ne s'annule pas, et $a, b \in I$.
Pour chaque affirmation, cocher la case correspondante (aucune justification n'est demandée).

1. $\int_a^b \frac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t = \frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$. ☐ Vrai ■ Faux
2. Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $F = G$. ☐ Vrai ■ Faux
3. Si F est une primitive de f sur I, alors $2F + 3$ aussi. ☐ Vrai ■ Faux
4. Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{2(1+x^2)}$. ☐ Vrai ■ Faux

.

Question 4 (6 pts)

1. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(2t)\mathrm{d}t$. On passe en complexe et on commence par calculer :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{2it}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{(1+2i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1+2i}[\mathrm{e}^{(1+2i)t}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{1+2i}(\mathrm{e}^{\pi+2i\pi}-1) \\ &= \frac{1-2i}{5}(\mathrm{e}^{\pi}-1) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1-2i(\mathrm{e}^{\pi}-1)}{5}.\end{aligned}$$

   Donc $I = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{2it}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{-2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}{5}$.

2. Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{x^2+6x+8}\mathrm{d}x$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 36-32 = 4$. Le polynôme a donc deux racines : -2 et -4. Donc $\frac{1}{x^2+6x+8} = \frac{1}{(x+2)(x+4)}$. On décompose en éléments simples : $\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{1/2}{x+2} + \frac{-1/2}{x+4}$.
   Donc :

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+4}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}[\ln(|x+2|)]_0^1 - \frac{1}{2}[\ln|x+4|]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5) + \frac{1}{2}\ln(4).\end{aligned}$$