II L'ordre 2 : $\left(y' + ay = 0 \quad k e^{-at}\right)$

On veut résoudre (E_L) $ay'' + by' + cy = f(t)$ $(a \neq 0)$ b, c constants.

1) Résolution de l'équation homogène :

(H_L) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Déf : L'éq. caractéristique de (H_L) est : $ar^2 + br + c = 0$ $\hookrightarrow (EC)$
d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Prop : Soit $r \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto e^{rt}$ est sol de (H_L) ssi r est sol de (EC).
Si de plus (EC) admet une seule solution r_0, alors $g : t \mapsto te^{r_0 t}$ est aussi sol de (H_L).

Dém : * $f : t \mapsto e^{rt}$ est deux fois dériv. sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = re^{rt}$ et $f''(t) = r^2 e^{rt}$.

f est sol de (H_L) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $af''(t) + bf'(t) + cf(t) = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $ar^2 + br + c = 0$

$\Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0 \Leftrightarrow r$ est sol de (EC).

* Si (EC) admet une seule sol $r_0 = -\frac{b}{2a}$.

g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = e^{r_0 t} + r_0 te^{r_0 t}$

$g''(t) = r_0 e^{r_0 t} + r_0 e^{r_0 t} + r_0^2 te^{r_0 t}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $ag''(t) + bg'(t) + cg(t)$

$= a(r_0 e^{r_0 t} + r_0 e^{r_0 t} + r_0^2 t e^{r_0 t}) + b(1 e^{r_0 t} + r_0 t e^{r_0 t}) + c t e^{r_0 t}$

$= e^{r_0 t}\left[2a r_0 + a r_0^2 t + b + b r_0 t + c t\right]$

$= e^{r_0 t}\left[t(a r_0^2 + b r_0 + c) + 2a r_0 + b\right]$

$a r_0^2 + b r_0 + c = 0$ car r_0 sol de (EC)

$2a r_0 + b = 0$ car $r_0 = -\frac{b}{2a}$.

$= 0$ donc g est sol de (H_2).

Th ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soit Δ le discriminant de (EC).
L'ensemble des sol. de (H_2) est :

① Si $\Delta \neq 0$:
$\{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, avec $A, B \in \mathbb{C}\}$
où r_1, r_2 sont les sol. de (EC),

② Si $\Delta = 0$:
$\{t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$, avec $A, B \in \mathbb{C}\}$
où r_0 est la sol de (EC).

Th ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Soit Δ le discriminant de (EC).
L'ensemble des sol de (H_2) à valeurs réelles est :

① Si $\Delta > 0$:
$\{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}\}$
où $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ les sol de (EC).

② Si $\Delta = 0$:
$\{t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}\}$
où $r_0 \in \mathbb{R}$ est la sol de (EC)

③ Si $\Delta < 0$:
$\{t \mapsto (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{\alpha t}$, avec $A, B \in \mathbb{R}\}$
où $\alpha \pm i\omega$ sont les sol de (EC).

Rq : dans le dernier cas, on peut écrire l'ensemble :
$\{t \mapsto C\cos(\omega t - \varphi)e^{\alpha t}$ avec $C, \varphi \in \mathbb{R}\}$ (CO3).
↳ déphasage.

Ex : (1) $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$ $\quad \omega_0 \in \mathbb{R}^*$.

(EC) : $r^2 + \omega_0^2 = 0$ deux sol : $\pm i\omega_0$

Sol de l'éq. diff : $\{ t \mapsto A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t),\ A, B \in \mathbb{R} \}$.

(2) Résoudre : $y'' - 5y' + 6y = 0$ (E_1)

$r^2 \to r^2 \to r^0$

- $y'' - 4y' + 4y = 0$ (E_2)
- $y'' - 2y' + 2y = 0$ (E_3)

- Eq. caract associée à (E_1) : $r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$.

$r_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad r_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

L'ensemble des sol. de (E_1) est :

$\boxed{\{ t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t},\ A, B \in \mathbb{R} \}}$

- Eq. caract associée à (E_2) : $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$r_0 = 2$.

L'ensemble des sol. de (E_2) est :

$\boxed{\{ t \mapsto (At + B)e^{2t},\ \text{avec } A, B \in \mathbb{R} \}}$.

- Eq. caract. associée à (E_3) : $r^2 - 2r + 2 = 0$.

$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$

$r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i \quad r_2 = 1 - i$

L'ensemble des sol à val. dans $\mathbb{C}$ de (E_3) est :

$\{ t \mapsto Ae^{(1+i)t} + Be^{(1-i)t},\ A, B \in \mathbb{C} \}$.

$\mathbb{R}$ =

$\{ t \mapsto (A\cos(1t) + B\sin(1t))e^{1t},\ A, B \in \mathbb{R} \}$

$(\{ t \mapsto C\cos(t - \varphi)e^t,\ C, \varphi \in \mathbb{R} \})$

2) Solution avec second membre :

Prop : Soient y_1, y_2 sol de $(E_2) : ay'' + by' + cy = f(t)$.

Alors $y_2 - y_1$ est sol de $(H_2) : ay'' + by' + cy = 0$.

Ainsi, si y_p est une sol. de (E_2) l'ensemble des sol. de (E_2) est

$$\{ t \mapsto y_p(t) + y_H(t), \text{ où } y_H \text{ est sol de } (H_2) \}.$$

Ex : idem ordre 1.

ex : Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 3$. (E).

- L'ensemble des sol de (H) est
$$\{ t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t},\ A, B \in \mathbb{R} \}$$ (voir ex. précédent)

- On cherche $y_p : A \mapsto P$:

y_p est sol de $(E) \iff 6P = 3$

$\iff P = \frac{1}{2}$.

Donc $y_p : t \mapsto \frac{1}{2}$ est sol de (E).

L'ensemble des sol de (E) est :

$$\boxed{\{ t \mapsto \frac{1}{2} + Ae^{2t} + Be^{3t},\ A, B \in \mathbb{R} \}}$$

3) Recherche de y_p :

Prop (principe de superposition) : Si y_1 est sol. de $ay'' + by' + cy = f_1(t)$

et y_2 est sol de $ay'' + by' + cy = f_2(t)$, alors $y_1 + y_2$ est sol de

$ay'' + by' + cy = f_1(t) + f_2(t)$. **Ex :** idem ordre 1.

Méthode : On cherche y_p sous la même forme que f.

① Si f est constante : $y_p : t \mapsto P$.

② Si f est un polynôme de degré d, $y_p : t \mapsto a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_0$

③ Si f est un (poly. de deg d) $\times e^{\lambda t}$
$\rightarrow y_p : t \mapsto (a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_0) \times e^{\lambda t}$ si λ n'est pas sol de (EC)
ou encore $t \mapsto e^{\lambda t}$ n'est pas sol de (H)

$\Delta \neq 0 \rightarrow y_p : t \mapsto t \times (a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_0) \times e^{\lambda t}$ si λ sol simple de (EC)
ou encore si $t \mapsto e^{\lambda t}$ est sol de (H)

$\Delta = 0 \rightarrow y_p : t \mapsto t^2 \times (a_d t^d + \dots + a_0) \times e^{\lambda t}$ si λ est double de (EC)
ou encore si $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto t e^{\lambda t}$ sont sol de (H).

④ Si f est (poly de degré d) $\times \cos(\omega t)$ / $\sin(\omega t)$.
on remplace par (poly de degré d) $\times e^{i\omega t}$
on trouve y_p avec ③ et on prend Re / Im.

ex : Résoudre ① $y'' - 2y' + y = 1$ (E_1) ③ $y'' - y = \cos(t)$ (E_3)

② $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$ (E_2)

① • Eq. homogène : $(H_1) : y'' - 2y' + y = 0$

l'éq. caract. associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$
$\Delta = 4 - 4 = 0$, $r_0 = 1$

l'ens. des sol de (H) est $\{ t \mapsto (At + B) e^t, A, B \in \mathbb{R} \}$.

• On cherche y_p sous la forme $y_p : t \mapsto P$.
y_p est sol de $(E_1) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = 1 \Leftrightarrow P = 1$

Donc $y_p : t \mapsto 1$ est sol de (E_1)

L'ensemble des sol de (E_1) est : $\boxed{\{t \mapsto 1 + (At+Be^t,\ A, B \in \mathbb{R}\}}$

② • Eq homogène : (H_2) : $y'' - 5y' + 6y = 0$

L'éq. caract associée est $r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

L'ensemble des sol de (H_2) est $\{x \mapsto Ae^{2x} + Be^{3x},\ A, B \in \mathbb{R}\}$

• On cherche y_p sous la forme : $y_p : x \mapsto Pxe^{2x}$ avec $P \in \mathbb{R}$.

On a $y_p' : x \mapsto Pe^{2x} + 2Pxe^{2x}$, $y_p'' : x \mapsto 2Pe^{2x} + 2Pe^{2x} + 4Pxe^{2x}$

y_p est sol de (E_2) / $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p''(x) - 5y_p'(x) + 6y_p(x) = e^{2x}$ $4Pe^{2x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $4Pe^{2x} + 4Pxe^{2x} - 5(Pe^{2x} + 2Pxe^{2x}) + 6Pxe^{2x} = e^{2x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $-Pe^{2x} = e^{2x}$

$\Leftrightarrow P = -1$.

Donc $y_p : x \mapsto -xe^{2x}$ est sol de (E_2),

L'ensemble des sol de (E_2) est : $\boxed{\{x \mapsto -xe^{2x} + Ae^{2x} + Be^{3x},\ A, B \in \mathbb{R}\}}$

③ • Eq homogène $y'' - y = 0$. (H_3)

L'éq. caract. associée est $r^2 - 1 = 0$ donc $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.

L'ensemble des sol de (H_3) est $\{t \mapsto Ae^t + Be^{-t},\ A, B \in \mathbb{R}\}$.

• (E_3) : $y'' - y = e^{it}$.

On cherche y_p sous la forme $y_p : t \mapsto Pe^{it}$.

y_p sol de $(E_3') \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $y_p''(t) - y_p(t) = e^{ir}$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $-Pe^{ir} - Pe^{ir} = e^{ir}$

$\Leftrightarrow -2P = 1 \Leftrightarrow P = -\frac{1}{2}$.

Donc $y_p : t \mapsto -\frac{1}{2} e^{it}$ sol de (E_3')

Donc $\mathrm{Re}(y_p) : t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t)$ sol de (E_3).

L'ensemble des sol de (E_3) est : $\boxed{\{t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + Ae^t + Be^{-t},\ A, B \in \mathbb{R}\}}$

4) Problème de Cauchy :

Déf : On appelle pb. de Cauchy un système du type :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

où $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$.

Th (Cauchy-Lipschitz linéaire) : Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$.

Le pb de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$ a une unique solution.

conditions initiales.

Ex : Résoudre : (S) $\begin{cases} y'' - y = \cos(t) & (E) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

→ cf ex. précédent, l'ensemble des sol de (E) est

$$\{t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + Ae^t + Be^{-t},\ A, B \in \mathbb{R}\}.$$

→ Soit $y : t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + Ae^t + Be^{-t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

$y(0) = -\frac{1}{2} + A + B$ et $y'(0) = 0 + A - B$

y est sol de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \frac{3}{2} \\ A = B \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{3}{4} = B$.

La sol de (S) est $y : t \mapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{-t}$

1/2 pc : Cor 10, 11. env : Cor 8 - 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10
Cor 9 - 1, 2, 3