Chapitre 9 : Résolution de systèmes linéaires

I - Droites du plan :

1/ Droites dans le plan :

Déf : Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.

L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan vérifiant $ax + by = c$ est une droite $\mathcal{D}$.

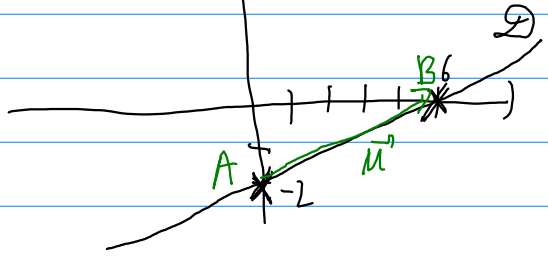
$ax + by = c$: UNE équation cartésienne de $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, ax + by = c\}.$$

($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$)

Rq : $\mathcal{D}$ a une infinité d'éq cartésiennes qui sont toutes proportionnelles : $2ax + 2by = 2c$ etc ...

ex : Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x - 3y = 6\}$.



si $x = 0$, $y = \frac{6}{-3} = -2$

si $y = 0$, $x = 6$.

Déf : Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ s'il existe $A, B \in \mathcal{D}$ tq $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Dans ce cas, $\mathcal{D} = \{A + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}\}$: représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

ex: $A=(0,-2)$ et $B=(6,0)$ sont sur $\mathcal{D}: x-3y=6$.

$\vec{u}=\vec{AB}=(6,2)$ vect directeur de $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}=\{(0,-2)+t(6,2),\ t\in\mathbb{R}\}$

$=\{(6t,-2+2t),\ t\in\mathbb{R}\}$.

$t=0:(0,-2)$, $t=1:(6,0)$

$t=-10:(-60,-22)$

on a résolu l'équation

Rq: L'ensemble de sol de $ax+by=c$ est de la forme

{une pt + sol de l'éq. homogène}.

Prop: Soient $\mathcal{D}_1: a_1x+b_1y=c_1$

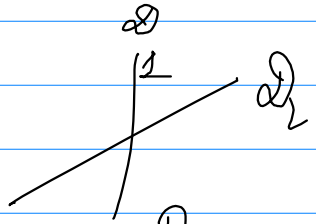
$\mathcal{D}_2: a_2x+b_2y=c_2$.

L'ensemble de sol du syst:

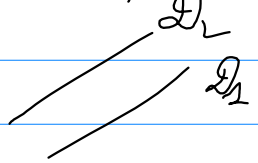
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

est $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$:

→ {1 point} si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes



→ $\emptyset$ si $\mathcal{D}_1 // \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1\neq\mathcal{D}_2$



→ $\mathcal{D}_1$ si $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2$.

2) Plans dans l'espace:

Déf: Soit $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient $ax+by+cz=d$

Sr un plan $\mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = d\}$$

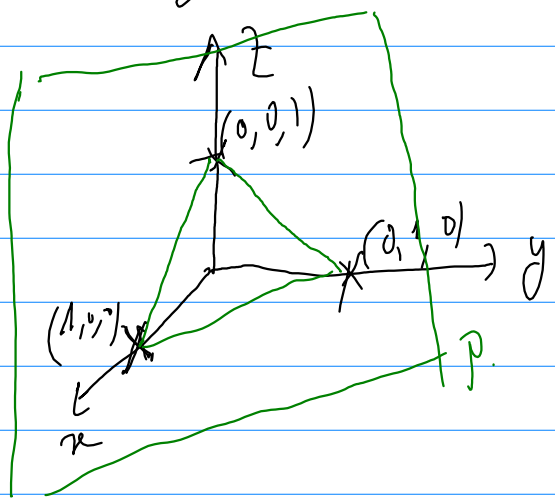
UNE éq. cartésienne de $\mathcal{P}$.

ex : $\mathcal{P} : x+y+z = 1$

avec $x=0, y=0, z=1$

$x=1, y=0, z=0$

$x=0, y=1, z=0$.



Rq : Si $a \neq 0$, $ax+by+cz = d$

$\Leftrightarrow x = \frac{d}{a} - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z$.

on a résolu l'éq.

$$\mathcal{P} = \{\left(\tfrac{d}{a} - \tfrac{b}{a}y - \tfrac{c}{a}z,\ y,\ z\right) \text{ avec } y,z \in \mathbb{R}\}$$

↳ représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

$$= \{\left(\tfrac{d}{a},0,0\right) + \left(-\tfrac{b}{a}y, y, 0\right) + \left(-\tfrac{c}{a}z, 0, z\right), \text{ avec } y,z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\left(\tfrac{d}{a},0,0\right) + y\left(-\tfrac{b}{a},1,0\right) + z\left(-\tfrac{c}{a},0,1\right), \ldots\}$$

Sol. par.

Sol de l'éq. homogène.