Contrôle de cours 7 - Calculs de primitives / EDL - Sujet A
Mardi 17 novembre 2026

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle $y' + \cos(3t)\,y = 0$.

L'équation est homogène. De plus, une primitive de $a : t \mapsto \cos(3t)$ est $A : t \mapsto \frac{1}{3}\sin(3t) + K$, donc $y' + \cos(3t)\,y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-\frac{\sin(3t)}{3}}$. □

Question 2 (5 pts)

1. Calculer $\displaystyle\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour $t > 0$.
   On fait une IPP : $\displaystyle\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^t - \int_1^t 1\,\mathrm{d}x = t\ln(t) - t + 1$.
2. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $\mathscr{E} : y' - 3y = \ln(t)\,\mathrm{e}^{3t}$.
   Comme une primitive de $a : t \mapsto -3$ est $A : t \mapsto -3t$, donc $y' - 3y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\mathrm{e}^{3t}$.
   On fait varier la constante : on cherche une solution de $\mathscr{E}$ sous la forme $y_p : t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{3t}$.
   y_P est solution de (E) ssi $\forall t \in]0, +\infty[$, $f'(t)\,\mathrm{e}^{3t} = \ln(t)\,\mathrm{e}^{3t}$ donc $f'(t) = \ln(t)$. On a déjà une primitive de f', donc on peut poser $y_P(t) = (t\ln(t) - t + 1)\,\mathrm{e}^{3t}$ qui est bien solution de (E).
   Donc $y' - 3y = \ln(t)\,\mathrm{e}^{3t} \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto (t\ln(t) - t + 1)\,\mathrm{e}^{3t} + C\mathrm{e}^{3t}$. □

Question 3 (2 pts)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $(H) : a'' + by' + c = 0$.

1. Décrire l'ensemble des solutions de (H) à valeurs complexes.
   Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les solutions de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{t \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}, A, B \in \mathbb{C}\right\}$.
   - Si $\Delta = 0$, on note r_0 la solution de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{t \mapsto (At + B)\,\mathrm{e}^{r_0 t}, A, B \in \mathbb{C}\right\}$.
2. Décrire l'ensemble des solutions de (H) à valeurs réelles. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les solutions réelles de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{t \mapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}, A, B \in \mathbb{R}\right\}$.
   - Si $\Delta = 0$, on note r_0 la solution de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{t \mapsto (At + B)\,\mathrm{e}^{r_0 t}, A, B \in \mathbb{R}\right\}$.
   - Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$ les solutions complexes de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{t \mapsto (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\,\mathrm{e}^{\alpha t}, A, B \in \mathbb{R}\right\}$.

Question 4 (2 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, sans justification.

1. Si y est une solution de $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2t}$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = (t + C)\,\mathrm{e}^{-2t}$.
   ■ Vrai ☐ Faux
2. Une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2t}$ peut être recherchée sous la forme $y_P : t \mapsto a\mathrm{e}^{2t}$.
   ☐ Vrai ■ Faux
3. Si y est une solution de $y'' - 3y' + 2y = 0$ vérifiant $y(0) = 0$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = C\left(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}\right)$.
   ■ Vrai ☐ Faux
4. Si y vérifie $y'' - y' = 0$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $y : t \mapsto A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t}$. ☐ Vrai ■ Faux
   □

Contrôle de cours 7 - Calculs de primitives / EDL - Sujet B
Mardi 17 novembre 2026

Question 1 (2 pts)

Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{1+t^2}y = 0$.

L'équation est homogène. De plus, une primitive de $a : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est $A : t \mapsto \arctan(t)$. Donc $y' + \dfrac{1}{1+t^2}y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{-\arctan(t)}$. □

Question 2 (5 pts)

1. Calculer $\displaystyle\int_0^t \arctan(x)\mathrm{d}x$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   On fait une IPP : $\displaystyle\int_0^t \arctan(x)\mathrm{d}x = [x\arctan(x)]_0^t - \int_0^t \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = t\arctan(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\mathscr{E} : y' - 2y = \arctan(t)e^{2t}$
   Comme une primitive de $a : t \mapsto -2$ est $A : t \mapsto -2t$, $y' - 2y = 0 \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto C\,\mathrm{e}^{2t}$.
   On fait varier la constante : on cherche une solution de $\mathscr{E}$ sous la forme $y_P : t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{2t}$.
   y_P est solution de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t)\,\mathrm{e}^{2t} = \arctan(t)\,\mathrm{e}^{2t}$ donc $f'(t) = \arctan(t)$. On a déjà une primitive de f', donc on peut prendre $y_P(t) = (t\arctan(t) - \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2))\,\mathrm{e}^{2t}$. Donc $y' - 2y = \arctan(t)e^{2t} \iff \exists C \in \mathbb{K} \mid y : t \mapsto (t\arctan(t) - \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2))\,\mathrm{e}^{2t} + C\,\mathrm{e}^{2t}$.

Question 3 (2 pts)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $(H) : a'' + by' + c = 0$.

1. Décrire l'ensemble des solutions de (H) à valeurs complexes.
   Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les solutions de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}, A, B \in \mathbb{C}\}$.
   - Si $\Delta = 0$, on note r_0 la solution de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto (At + B)\,\mathrm{e}^{r_0 t}, A, B \in \mathbb{C}\}$.
2. Décrire l'ensemble des solutions de (H) à valeurs réelles. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
   - Si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les solutions réelles de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t}, A, B \in \mathbb{R}\}$.
   - Si $\Delta = 0$, on note r_0 la solution de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto (At + B)\,\mathrm{e}^{r_0 t}, A, B \in \mathbb{R}\}$.
   - Si $\Delta < 0$, on note $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$ les solutions complexes de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\,\mathrm{e}^{\alpha t}, A, B \in \mathbb{R}\}$.

Question 4 (2 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, sans justification.

1. Si y est une solution sur $]0, +\infty[$ de $y' - \dfrac{1}{t}y = t^2$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in]0, +\infty[$, $y(t) = t^3 + Ct$.

   ☐ Vrai ■ Faux

2. Une solution de $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-t}$ peut être recherchée sous la forme $y_P : t \mapsto a\mathrm{e}^{-t}$.
☐ Vrai ■ Faux
3. Si y est une solution de $y'' - y' - 2y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, alors $y(t) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}$.
☐ Vrai ■ Faux
4. Si y est une solution de $y'' - 4y' = 0$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $y : t \mapsto A + B\mathrm{e}^{4t}$.
■ Vrai ☐ Faux