Assertions et démonstrations

I. Opérations sur les assertions

Soient A et B deux assertions. On peut créer d'autres assertions à partir de celles-ci :

A	B	A ET B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Conjonction : A ET B.

A	B	A OU B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Disjonction : A OU B.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Implication : $A \Rightarrow B$.

A	B	$A \iff B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Équivalence : $A \iff B$.

Exemples 1.

- $2 > 0$ ET $1 > 2$ est ...
- $2 > 0$ OU $1 > 2$ est ...
- 2 est pair OU 4 est pair est ...
- $2^2 = 5 \Rightarrow \pi = 0$ est ...
- $\forall x \in [-1,1], x \geq -1$ ET $x \leq 1$ est ...
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ est ...
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \iff a^2 = b^2$ est ...
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \leq y$ ET $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ est ...
- $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ est ...
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \iff x = 0$ OU $y = 0$ est ...

Application 1.

1. Décrire les ensembles :
   (a) $E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 0$ ET $x < 1)$ OU $x = 4\}$
   (b) $E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3$ ET $x < 5$ ET $x \neq 4\}$
   (c) $E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq 0$ ET $x > 1)$ OU $x = 4\}$
2. Compléter avec $\iff$, $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \ldots x = 2$ | (b) $\forall z \in \mathbb{C}, z = -\overline{z} \ldots z \in i\mathbb{R}$ | (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \frac{\pi}{2} \ldots e^{4ix} = 1$

On peut ensuite composer les opérations :

Proposition 1.

- NON(A OU B) *est équivalent à ...*
  Par exemple : NON($x \leq 1$ OU $x^2 > 2$) $\iff$ ...
- NON(A ET B) *est équivalent à ...*
  Par exemple : NON($x \in [1,2]$) $\iff$ ...
  NON($x = 0$ ET $y = 0$) $\iff$ ...

- NON(NON A) *est équivalent à ...*
- A ET(NON A) *est toujours FAUX.*
  Par exemple : $x \leq 1$ ET $x > 1$ *est FAUX.*
- A OU(NON A) *est toujours VRAI.*
  Par exemple : $x \leq 1$ OU $x > 1$ *est VRAI.*
- $A \Rightarrow B$ *est équivalent à* (NON B) $\Rightarrow$ (NON A).
  Par exemple : $(x^2 \geq 100 \Rightarrow x \geq 10) \iff ...$
  $(f$ *est dérivable* $\Rightarrow f$ *est continue)* $\iff ...$
- NON$(A \Rightarrow B)$ *est équivalent à* A ET(NON B).
  Par exemple : NON$(\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)) \iff ...$

Application 2. 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes puis leur négation.

(a) La fonction f est décroissante sur I.

(b) La fonction f est de signe constant sur I.

(c) La suite (u_n) est constante.

(d) La suite (u_n) est croissante.

(e) La suite (u_n) est majorée.

(f) La fonction f est périodique.

2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la négation des assertions suivantes :

(a) $1 \leq x < y$ | (b) $(x^2 = 1) \Rightarrow (x = 1)$ | (c) $x \geq 1 \iff y < 1$

II. Méthodes usuelles de démonstration

II.1. Preuves liées aux quantificateurs

Voir Chapitre 4.

II.2. Disjonction de cas

Lorsqu'on veut démontrer une assertion du type $\forall x \in E, A(x)$, on peut séparer les valeurs de x selon différents cas et effectuer un raisonnement spécifique pour chaque cas.

Exemple 2. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Premier cas :

- Deuxième cas :

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

II.3. Pour montrer une implication

II.3.1 Méthode directe

Lorsqu'on démontre que $A \Rightarrow B$ est vraie, on ne montre ni que A est vraie, ni que B est vraie : on démontre que SI A est vraie, ALORS B est vraie. On commence donc par supposer que A est vraie.
La rédaction est la suivante :
« Supposons que A est vraie. Alors.....
Donc B est vraie.
Ainsi $A \Rightarrow B$ est vraie. »

Exemple 3. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow \ln(2+x) > 0$.

Dans l'assertion $A \Rightarrow B$, A est appelée **condition suffisante** et B est appelée **condition nécessaire** : il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie, et si A est vraie alors B est nécessairement vraie.

Remarque 1. Pour montrer que l'assertion $A \Rightarrow B$ est fausse, il faut voir que A est vraie mais B est fausse.

Exemple 4. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ est fausse car ...

Application 3. Dans chacun des cas suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse puis le démontrer :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x \Rightarrow x = |x|$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x = 0$ et $y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair $\Rightarrow$ n^2 est pair.

II.3.2 Méthode par contraposée

On utilise que $(A \Rightarrow B) \iff ((\text{NON } B) \Rightarrow (\text{NON } A))$.

On rédige donc comme suit :
« Supposons que (NON B) est vraie. Alors.....
Donc NON A est vraie.
Par contraposée, $A \Rightarrow B$ est vraie. »

Exemple 5. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair.
Prenons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que ....

Par contraposée, $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair.

Application 4. Montrer par la contraposée que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$.

II.4. Démonstration d'une équivalence

On a deux méthodes pour démontrer que l'équivalence $A \iff B$ est vraie :

- soit on procède par équivalence : on montre que $A \iff \ldots \iff \ldots \iff B$;
- soit on procède par double implication en rédigeant comme suit :
  « Supposons que A est vraie. Alors....
  Donc B est vraie.
  Réciproquement, supposons que B est vraie. Alors....
  Donc A est vraie.
  Ainsi $A \iff B$ est vraie. »

Exemple 6. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair $\iff$ n^2 est pair. En effet, on a montré l'implication directe dans l'application 3 et la réciproque dans l'exemple 5.

II.5. Démonstration par l'absurde

On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer pour aboutir à quelque chose de toujours FAUX.

On rédige ainsi :
« Supposons par l'absurde que NON A est vraie. Alors.....
On aboutit donc à une contradiction.
Ainsi A est vraie. »

Exemple 7. Montrons que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.
Supposons par l'absurde que : ...

Ceci est une contradiction.
Ainsi $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$.

Application 5. Montrer par l'absurde que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

II.6. Démonstration par récurrence

Voir Chapitre 4.

II.7. Raisonnement par analyse-synthèse

Pour trouver tous les éléments d'un ensemble E qui vérifient une propriété $\mathscr{P}$, on peut raisonner par analyse-synthèse. C'est un raisonnement en deux étapes : on suppose d'abord qu'on dispose d'un élément qui satisfait la propriété et on en déduit des conditions nécessaires sur cet éléments ce qui restreint les solutions possibles (c'est l'analyse). Dans la synthèse, on vérifie que les solutions trouvées dans l'analyse satisfont bien la propriété. La rédaction est comme suit :
« Analyse : soit $x \in E$. Supposons que x vérifie $\mathscr{P}$. Alors...
Synthèse : Soit $x = \ldots$, vérifions que x satisfait $\mathscr{P}$. »

Remarque 2. On utilise ce raisonnement permet notamment de répondre à des problèmes du type montrer que : $\exists! x \in E \mid \mathscr{P}(x)$. En effet, la partie analyse montre l'unicité (on montre que x est forcément d'une certaine forme) et la partie synthèse montre l'existence (on exhibe un exemple).

Exemple 8. 1. On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la condition :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons qu'elle vérifie la condition.
  En prenant un $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $y = f(x)$, on obtient :

Ainsi, $f(x) =$
Donc f est une fonction

- **Synthèse :** Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto b - x$. Vérifions si f satisfait la condition : prenons $x, y \in \mathbb{R}$,

2. Montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, il existe une unique fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et un unique réel a tels que $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$ et : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = g(x) + a$.

   - **Analyse :**

   - **Synthèse :**

II.8. Pour s'amuser !

Une bande de voleurs se réunit pour partager le butin du dernier larcin. Leurs noms sont Numéro 1, Numéro 2, etc... Le chef décide de la règle de répartition suivante :

- Numéro 1 propose une répartition entre les gredins : si la moitié, ou plus, des malfaiteurs est d'accord avec la répartition, elle est réalisée.
- Si la répartition est refusée, Numéro 1 ne reçoit rien et est exclu de la répartition. Numéro 2 propose à son tour une répartition entre les gredins restants, et est exclu si sa répartition n'est pas retenue.
- Ainsi de suite Numéro 3, 4, etc... proposent une répartition entre les restants, jusqu'à ce que la règle de la majorité permette d'aboutir.

Les gredins, dès qu'il s'agit d'argent, savent réfléchir. Il n'y a pas de collusion entre eux et chacun cherche à maximiser son gain. Il y a 150 pièces d'or. Vous êtes Numéro 1, quelle répartition proposez-vous si :

1. il y a 2 gredins ?
2. il y a 3 gredins ?
3. il y a 4 gredins ?
4. il y a 10 gredins ?