

Table des matières

● Raisonnement généraux	2
★ Montrer que : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$	2
★ Montrer que : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$	3
★ Résoudre une équation $f(x) = 0$	3
★ Étudier le signe de $f(x)$	4
★ Étude de $x \mapsto u(x)^{v(x)}$	4
★ Calcul d'une somme simple	4
★ Calcul d'une somme double	5
● Méthodes sur les applications	6
★ Montrer que $f : E \rightarrow F$ est bien définie	6
★ Montrer que $f : E \rightarrow F$ est injective	6
★ Montrer que $f : E \rightarrow F$ est surjective	6
★ Montrer que $f : E \rightarrow F$ est bijective	7
● Méthodes sur les intégrales	8
★ Montrer que $\int_a^b f(x)dx$ est bien définie	8
★ Calcul de $\int_a^b f(x)dx$	8
★ Existence et calcul d'une primitive	8
★ Étude de $x \mapsto g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$	9
● Méthodes sur les nombres réels et complexes	10
★ Déterminer la borne supérieure ou la borne inférieure de $A \subset B$	10
★ Linéariser $(\cos x)^n$ ou $(\sin x)^n$	10
★ Exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ comme un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$	10
★ Démontrer qu'un nombre complexe est réel, ou imaginaire pur, ou unitaire	11

MONTRER QUE : $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$
• Méthode 1 :

Soit $x \in E$.

On a donc donc donc $\mathcal{P}(x)$

• Méthode 2 :

On peut aussi reformuler d'abord $\mathcal{P}(x)$ avant de commencer le raisonnement. On a

$$\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x) \iff \mathcal{P}_1(x) \iff \dots \iff \mathcal{Q}(x)$$

Il suffit alors

- ✓ soit de montrer $\mathcal{Q}(x)$ en appliquant la **Méthode 1**,
- ✓ soit, si $\mathcal{Q}(x)$ est évidente, de dire « comme $\mathcal{Q}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$ alors $\mathcal{P}(x)$ est aussi vraie pour tout $x \in E$. »

• Variante 1 : montrer une implication

Cette méthode est utilisée également quand on veut montrer un énoncé du type

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x)$$

Dans ce cas on rédigera de la manière suivante :

Soit $x \in E$. On suppose que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

On a donc donc donc $\mathcal{Q}(x)$

• Variante 2 : montrer une équivalence par double implication

Cette méthode est utilisée également quand on veut montrer, en utilisant la méthode de double implication, un énoncé du type

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x) \iff \mathcal{Q}(x)$$

Dans ce cas on utilise deux fois la **Variante 1** :

($\implies$) Soit $x \in E$. On suppose que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Montrons $\mathcal{Q}(x)$

($\impliedby$) Soit $x \in E$. On suppose que $\mathcal{Q}(x)$ est vraie. Montrons $\mathcal{P}(x)$

• Variante 3 : montrer une inclusion entre ensembles

Avec cette méthode on peut montrer que $A \subset B$ quand A et B sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$, ce qui revient à établir

$$\forall x \in E, \quad x \in A \implies x \in B$$

Il s'agit de la **Variante 1** en ayant posé « $\mathcal{P}(x) : x \in A$ » et « $\mathcal{Q}(x) : x \in B$ ».

• Variante 4 : montrer une égalité d'ensembles

Avec cette méthode on peut montrer que $A = B$ quand A et B sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$, ce qui revient à établir

$$\forall x \in E, \quad x \in A \iff x \in B$$

Dans ce cas, si on souhaite prouver $A = B$ par double inclusion (montrer $A \subset B$, puis $B \subset A$) alors on applique la **Variante 2** avec « $\mathcal{P}(x) : x \in A$ » et « $\mathcal{Q}(x) : x \in B$ ».

MONTRER QUE : $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$

• **Méthode 1 :**

$$\forall x \in E, \quad f(x) = f_1(x) = \dots \dots = g(x)$$

• **Méthode 2 :**

Si on peut effectuer l'opération $f(x) - g(x)$, on peut écrire

$$\forall x \in E, \quad f(x) - g(x) = \dots \dots = 0$$

• **Méthode 3 :**

Si $E = I \subset \mathbf{R}$ et que $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont dérivables sur I (ou presque tout I) on peut étudier les variations de $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \quad u(x) = f(x) - g(x)$$

Si on trouve $u' = 0$ sur I intervalle alors on aura $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.

Si on trouve $u' = 0$ sur presque tout I il faudra utiliser la continuité de u sur I pour obtenir le même résultat.

RÉSOUTRE UNE ÉQUATION $f(x) = 0$ D'INCONNUE $x \in I$ AVEC $I \subset \mathbf{R}$

• **Méthode 1 : en raisonnant directement par équivalences.**

$$\forall x \in E, \quad f(x) = 0 \iff \dots \dots \iff x \in A$$

L'ensemble solution de $f(x) = 0$ dans E est alors $\mathcal{S} = A$.

• **Méthode 2 : par analyse/synthèse.**

Analyse : On suppose que $x \in I$ vérifie $f(x) = 0$.

On adoncdonc $x \in A$.

Synthèse : On suppose que $x \in I$ vérifie $x \in A$.

On adoncdonc $f(x) = 0$.

• **Méthode 3 : par disjonction des cas.**

Si on sait déterminer des ensembles $E_1, \dots, E_n$ adaptés au problème vérifiant $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ on peut résoudre $f(x) = 0$ sur chacun des E_k (attention à bien vérifier que les solutions trouvées sont bien dans E_k).

La rédaction prendra alors la forme suivante sur chaque E_k pour $k = 1 \dots, n$:

Cas où $x \in E_k$: On a

$$\forall x \in E_k, \quad f(x) = 0 \iff \dots \dots \iff x \in A_k \subset E_k$$

L'ensemble solution de $f(x) = 0$ dans E est alors $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^n A_k$.

ÉTUDIER LE SIGNE DE $f(x)$ POUR $x \in I$ AVEC $I \subset \mathbf{R}$

• Méthode 1 :

Factoriser $f(x)$ et utiliser un tableau de signe.

• Méthode 2 :

Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur I (ou presque tout I) on peut étudier les variations de $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in I, \quad u(x) = f(x) - g(x)$$

• Variante : montrer une inégalité

Avec cette méthode on peut montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ en étudiant le signe de $f(x) - g(x)$.

ÉTUDE DE $x \mapsto u(x)^{v(x)}$

La fonction s'écrit $x \mapsto f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$ définie sur $D = \{x \in \mathbf{R} \mid u(x) > 0\}$.

CALCUL D'UNE SOMME SIMPLE

• Méthode 1 : avec une somme de référence

On utilise les opérations autorisées sur les sommes afin de faire apparaître les sommes classiques suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad ; \quad \sum_{k=p}^n x^k$$

• Méthode 2 : avec une somme télescopique

On introduit la bonne suite (a_k) de manière à ce que la somme s'écrive de l'une des manières suivantes :

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) \quad ; \quad \sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1})$$

• Méthode 3 : pour les sommes de signes alternés

Pour les sommes faisant apparaître un $(-1)^k$ on pourra partitionner la somme en deux parties en utilisant

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_0^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p} + \sum_0^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2p+1} = \sum_0^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2p} + \sum_0^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} a_{2p-1}$$

• Méthode 4 : pour les sommes avec un coefficient binomial

On peut essayer de faire apparaître la formule du binôme, ou bien de faire apparaître une somme télescopique en transformant le coefficient binomial avec la formule de Pascal.

• Méthode 5 : pour les sommes avec $\sin(kx)$ ou $\cos(kx)$

On se ramènera souvent à une somme géométrique de nombres complexes en utilisant

$$\cos(kx) = \operatorname{Re} \left(e^{ikx} \right) \quad ; \quad \sin(kx) = \operatorname{Im} \left(e^{ikx} \right)$$

• Variante : pour les sommes télescopiques

On peut se ramener à un télescopage partiel si on arrive à écrire la somme sous la forme

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+q} - a_k)$$

Il s'agit ensuite de séparer en deux sommes et de faire le changement de variable $k' = k + q$ dans la première somme avant de télescoper partiellement.

CALCUL D'UNE SOMME DOUBLE

On se ramène au calcul de deux sommes imbriquées l'une dans l'autre avec l'une des formules suivantes

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} \quad ; \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

MONTRER QUE $f : E \rightarrow F$ EST BIEN DÉFINIE

On vérifie que

- ✓ pour tout $x \in E$ l'expression $f(x)$ est bien définie,
- ✓ pour tout $x \in E$ on a bien $f(x) \in F$

MONTRER QUE $f : E \rightarrow F$ EST INJECTIVE**• Méthode 1 : avec la définition**

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.

Par contraposée il revient au même de montrer que si $x_1 \neq x_2$ alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.

• Méthode 2 : avec une équation

Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Si pour tout $y \in F$ cette équation possède au plus une solution, alors f est injective.

• Méthode 3 : composition

La composée de deux fonctions injectives est injective.

• Variante :

Pour montrer que f n'est pas injective il suffit de trouver un seul $y_0 \in F$ tel que $f(x) = y_0$ possède au moins deux solutions dans E .

MONTRER QUE $f : E \rightarrow F$ EST SURJECTIVE**• Méthode 1 : avec la définition**

Soit $y \in F$. Montrons : $\exists x \in E, f(x) = y$

Il revient au même de montrer que $F \subset f(E)$.

• Méthode 2 : avec une équation

Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Si pour tout $y \in F$ cette équation possède au moins une solution, alors f est surjective.

• Méthode 3 : composition

La composée de deux fonctions surjectives est surjective.

• Variante :

Pour montrer que f n'est pas surjective il suffit de trouver un seul $y_0 \in F$ tel que $f(x) = y_0$ ne possède aucune solution dans E .

MONTRER QUE $f : E \rightarrow F$ EST BIJECTIVE**• Méthode 1 : avec la définition**

Soit $y \in F$. Montrons que : $\exists ! x \in E$, $f(x) = y$

Il revient au même de montrer que f est injective et surjective.

• Méthode 2 : avec une équation

Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

Si pour tout $y \in F$ cette équation a une unique solution, alors f est bijective.

Par définition de la réciproque l'unique solution de $f(x) = y$ est $x = f^{-1}(y)$.

Cette méthode est principalement utilisée quand on cherche une expression de f^{-1} .

• Méthode 3 : cas où $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ avec I intervalle

On applique le théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

• Variante 1 : f réalise une bijection de $A \subset E$ sur $B \subset F$

On montre d'abord que $f(A) \subset B$, puis que : $\forall y \in B$, $\exists ! x \in A$, $f(x) = y$

• Variante 2 :

Pour montrer que f n'est pas bijective il suffit de montrer que f n'est pas injective, ou bien de montrer que f n'est pas surjective.

MONTRER QUE $\int_a^b f(x)dx$ EST BIEN DÉFINIE

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc l'intégrale est bien définie.

CALCUL DE $\int_a^b f(x)dx$

• Méthode 1 : primitive "à vue"

Si on reconnaît une primitive usuelle F de f on écrira

$$\int_a^b f(x)dx = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

• Méthode 2 : intégration par parties

On déterminera $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ et $v : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ pour appliquer la formule d'IPP.

Ces fonctions sont celles intervenant dans le crochet dans la formule.

• Méthode 3 : changement de variable

On peut poser le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ défini par $x = \varphi(t)$. On aura $dx = \varphi'(t)dt$.

On fera parfois un changement de variable du type $t = \psi(x)$. Si ψ est bijective cela équivaut à $x = \psi^{-1}(t)$.

On veillera à ne jamais mélanger les nouvelles et anciennes variables dans le calcul de l'intégral.

• Méthode 4 : cas d'un quotient de polynômes

Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ on pourra décomposer cette fraction en éléments simples pour primitiver avec du logarithme (pour $1/(x+a)$) ou de l'arctangente (pour $1/(a^2+x^2)$). On retiendra

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \times \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)$$

EXISTENCE ET CALCUL D'UNE PRIMITIVE

Le théorème fondamental de l'intégration (TFI) assure que si f est continue sur le segment $[a, b]$ alors f possède une primitive sur $[a, b]$.

De plus, une de ces primitives est (par exemple) donnée par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\text{ÉTUDE DE } x \mapsto g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$$

On suppose que $u : I \rightarrow J$ et $v : I \rightarrow J$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec I et J intervalles de $\mathbf{R}$, et f continue sur J .

✓ g est bien définie sur I car f est continue sur $[u(x), v(x)]$ (ou $[v(x), u(x)]$) pour tout $x \in I$.

Il faut bien vérifier que ces intervalles sont contenus dans J , où f est continue.

✓ Soit F une primitive de f sur J . On a

$$\forall x \in I, \quad g(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

✓ L'expression précédente montre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (composées bien définies et sommes de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) et que

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

✓ Pour étudier la parité de g on fera le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ défini par $t = -w$.

DÉTERMINER LA BORNE SUPÉRIEURE OU LA BORNE INFÉRIEURE DE $A \subset \mathbb{R}$

✓ Existence :

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée alors A possède une borne supérieure.

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée alors A possède une borne inférieure.

✓ Calcul de $\sup(A)$:

On suppose que l'on a identifié un "meilleur" majorant potentiel M .

▷ Si $M \in A$ alors M est un majorant de A et $M \in A$, donc $M = \max(A)$ et en particulier $M = \sup(A)$.

▷ Si $M \notin A$ alors on montre l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$, et on a donc $M = \sup(A)$ par caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Dans le second cas $\max(A)$ n'existe pas (preuve par l'absurde).

✓ Calcul de $\inf(A)$:

On suppose que l'on a identifié un "meilleur" minorant potentiel m .

▷ Si $m \in A$ alors m est un minorant de A et $m \in A$, donc $m = \min(A)$ et en particulier $m = \inf(A)$.

▷ Si $m \notin A$ alors on montre l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m$, et on a donc $m = \inf(A)$ par caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

Dans le second cas $\min(A)$ n'existe pas (preuve par l'absurde).

LINÉARISER $(\cos x)^n$ OU $(\sin x)^n$

Il s'agit de transformer ces expressions en combinaisons linéaires de $\cos(px)$ et de $\sin(px)$.

• Méthode :

On utilise les formules d'Euler puis la formule du binôme :

$$(\cos x)^n = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(n-2k)x} \quad ; \quad (\cos x)^n = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^n}{2^n i^n} = \frac{1}{2^n i^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x}$$

Il reste ensuite à regrouper les e^{ipx} de manière à refaire apparaître les $\cos(px)$ et $\sin(px)$.

Si on part de $(\cos x)^n$ on devra n'obtenir que des $\cos(px)$.

• Variante :

La même méthode s'utilise pour linéaire une expression du type $(\cos px)^n (\sin qx)^m$.

EXPRIMER $\cos(nx)$ OU $\sin(nx)$ COMME UN POLYNÔME EN $\cos x$ ET $\sin x$

• Méthode :

On utilise la formule de Moivre puis le binôme, puis de récupérer les termes d'indices pairs ou impairs suivant le cas

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \right) \\ \sin(nx) &= \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^n) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\sin x)^k (\cos x)^{n-k} \right) \end{aligned}$$

DÉMONTRER QU'UN NOMBRE COMPLEXE EST RÉEL, OU IMAGINAIRE PUR, OU UNITAIRE**• Méthode 1 : avec la forme algébrique**

Si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ on a

$$z \in \mathbf{R} \iff b = 0 \quad ; \quad z \in i\mathbf{R} \iff a = 0 \quad ; \quad z \in \mathbb{U} \iff a^2 + b^2 = 1$$

• Méthode 2 : avec le conjugué

$$z \in \mathbf{R} \iff \bar{z} = z \quad ; \quad z \in i\mathbf{R} \iff \bar{z} = -z \quad ; \quad z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

• Méthode 3 : avec une forme exponentielle

Si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ on a

$$z \in \mathbf{R} \iff \theta \equiv 0[\pi] \quad ; \quad z \in i\mathbf{R} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \quad ; \quad z \in \mathbb{U} \iff r = 1$$