

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalités	
Valeur absolue. Inégalité triangulaire. Dans $\mathbf{R}$, parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum. Partie entière d'un nombre réel.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $x - a \leq b$. Notation $\lfloor x \rfloor$
Trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par cosinus et sinus. Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbf{R}$. Cosinus et sinus de $\pi \pm x$, de $\frac{\pi}{2} \pm x$. Cosinus et sinus des angles usuels. Formules d'addition $\cos(a)$, $\sin(a \pm b)$. Cas particulier des formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$. Fonctions circulaires cosinus et sinus. Pour $x \in \mathbf{R}$, inégalité $\sin(x) \leq x$. Fonction tangente. Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels. Formule d'addition $\tan(a \pm b)$.	Notation $a \equiv b[2\pi]$. Les étudiants doivent savoir retrouver ces résultats et résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples en s'aidant du cercle trigonométrique. On présente une justification géométrique de l'une de ces formules. Les étudiants doivent savoir retrouver rapidement les formules donnant $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a)\sin(b)$. Notation $\tan$. Dérivée, variations, représentation graphique. Interprétation sur le cercle trigonométrique.
Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbf{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	La construction de $\mathbf{C}$ est hors programme. On identifie $\mathbf{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $z - z_0$, cercles et disques.
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbf{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$. Formule de Moivre.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$. Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.	
Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbf{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Racines n-ièmes	
Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbf{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbf{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .
Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z + b$ pour $(a, b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Si l'exercice type n'est pas parfaitement maîtrisé, la note de pourra pas excéder 09/20, et cela peu importe l'efficacité constatée sur la résolution des autres exercices.

Exercices "type"

- Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On suppose que $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

- Soit $x \in]0, 2\pi[$. Calculer $A_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$.
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe une fonction polynôme $T_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x)$$

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer explicitement une fonction polynôme à coefficients réels T_n vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

- Linéariser l'expression $\cos^2 x \sin^3 x$, puis écrire sous forme d'un polynôme trigonométrique l'expression $\sin(4x)$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère

$$S_0 = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} \quad ; \quad S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1} \quad ; \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$$

Calculer $S_0 + S_1 + S_2$ et $S_0 + jS_1 + j^2S_2$ où $j = e^{2i\pi/3}$. En déduire les valeurs de S_0, S_1 et S_2 .