CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbf{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel : bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y par- court l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n .
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $GL_n(\mathbf{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Inverse d'une transposée.	
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- On considère l'application $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \mathscr{F}(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \mathbf{R})$ définie par $M \mapsto \Phi_M$ avec $\Phi_M(A) = \mathrm{tr}(MA)$.
  Montrer que Φ est injective.
- Justifier que A ci-dessous est inversible et déterminer A^{-1}.
  Exprimer A en fonction des puissances de B et en déduire une nouvelle preuve du fait que A soit inversible et de la valeur de A^{-1}.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
- Rappeler la définition de la trace $\mathrm{tr}(M)$ d'un élément $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
  Montrer que $\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda \mathrm{tr}(B)$ et que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Déterminer l'ensemble des $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
- Montrer que toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit de manière unique $M = S + A$ avec $S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbf{R})$.
- Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$. Calcul des puissances de
$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
- Soit dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, trouver son inverse puis calculer $D = P^{-1}AP$.
  Montrer que $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ commute avec D si et seulement si Δ est une matrice diagonale.
  En déduire $\mathscr{C}(A)$, l'ensemble des matrices carrées commutant avec A.
- Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ et J la matrice carrée d'ordre 3 remplie de 1.
  Exprimer M_a en fonction de I_3 et de J.
  Déterminer un polynôme P de degré 2 à coefficients réels tel que $P(M_a) = 0$.
  En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a est inversible et préciser alors M_a^{-1}.