CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $M_{n,p}(\mathbf{K})$. Espace $\mathbf{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbf{K}^\mathbf{N}$.
Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbf{R}^3$. Sous-espace $\mathbf{K}_n[X]$ de $\mathbf{K}[X]$. Notation $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice. Famille libre, liée. Bases, coordonnées	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbf{K}_n[X]$.
Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l ?intersection. Sous-espaces supplémentaires.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.
Généralités sur les applications linéaires	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}u=\mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$. Identités, homothéties Opérations sur les endomorphismes : combinaison li- néaire, composition. Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2=p$, par $s^2=\mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F Bilinéarité de la composition Notation $\mathrm{Im}u$. Notation $\mathrm{Ker}u$. Caractérisation de l'injectivité. Notations $\mathrm{id}_E,\mathrm{id}$ Notation u^k pour $u\in\mathscr{L}(E)$ et $k\in\mathbf{N}$. On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $GL(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u\in GL(E)$ et $k\in\mathbf{Z}$.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- Caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
  Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ montrer que $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
- Définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(u_1, \dots u_n)$ de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
  Montrer que (f_0, f_1, f_2) est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ où $f_0 : x \mapsto x$, $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
- Définition de $F + G$ si F, G sont des sous-espace vectoriels de E. Définition de $E \oplus F$.
  Caractérisation avec l'intersection.
  Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
- Définition des coordonnées d'un vecteur dans une base de E.
  Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ où $u_1 = (0,1,1); u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$.
  Déterminer les coordonnées de $u = (1,2,-1)$ dans la base $\mathscr{B}$.
- Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ on considère l'endomorphisme $P(u) \in \mathscr{L}(E)$ défini par $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k$.
  On suppose que $x_0 \in E$ <u>non nul</u> et que $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifient la relation $u(x_0) = \lambda x_0$ et que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Montrer qu'alors λ est une racine de P.
- Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de $n \geqslant 1$ vecteurs de E.
  On a alors
  $$u\left(\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)\right) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$
- Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Si u est surjective alors l'image par u de toute famille génératrice de E est génératrice de F.
- Soit E, F deux $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  Si u est injective alors l'image par u de toute famille libre de E est une famille libre de F.
- Caractérisation des projecteurs (sans démonstration). Décomposition en somme directe associée (démonstration).
- Caractérisation des symétries (sans démonstration). Décomposition en somme directe associée (démonstration).