CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre $y'' + ay' + by = f(x)$ où a et b sont des scalaires et f une fonction réelle ou complexe définie et continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante. Si a et b sont réels, description des solutions réelles. Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(\lambda, A) \in \mathbf{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbf{R}^2$. La démonstration de ce résultat est hors programme.
Ensemble des polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbf{K}[X]$. Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbf{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section " Nombres complexes ". Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $C[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbf{C}[X]$. Deux racines complexes d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ ont la même multiplicité.
Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- Résoudre $y' + y = (1+e^x)^{-1}$ sur $\mathbf{R}$.
- Résoudre $y'' - y = e^{-x}\cos x$ sur $\mathbf{R}$.
- Énoncé de la division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$.
  Montrer que α est racine de P si et seulement si $(X-\alpha)$ divise P.
  Montrer que $P_n = X^n - 1$ et que $Q_n = X^n + 1$ sont scindés à racines simples sur $\mathbf{C}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
- Décrire les $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer les solutions polynomiales de (E_n) : $\quad xy'' - (x-1)y' + ny = 0$ sur $\mathbf{R}$.
- On suppose connue l'existence d'une suite $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, et que T_n est de plus de degré n.
  Montrer que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$, puis que T_n est solution de $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$ sur $\mathbf{R}$.
- Soit $n \geqslant 2$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n-1} X^{2k} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + 1\right)$$