

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée. Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si f' est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne. Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	Interprétations géométriques et cinématiques. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. La fonction f' est alors continue en a.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto (1+x)^\alpha, \arctan, x \mapsto 1/(1-x)$. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan$. Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a. On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- Énoncé du théorème de Rolle et démonstration du théorème des accroissements finis.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note $L_n = P_n^{(n)}$ avec $P_n = (1 - X^2)^n$.
Montrer que L_n est scindé à racines simples dans $\mathbf{R}$.
- Montrer que $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \arcsin(1 - x^4)$ est dérivable en 0.
- Déterminer la limite en 0 de $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

- On considère $g : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad ; \quad f(t) = \begin{cases} \frac{\arctan t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Justifier que g est bien définie, qu'elle est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement ainsi obtenu est dérivable en 0.

- Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1/(1 + e^x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
En utilisant un $DL_3(0)$ déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 et donner la position de $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.