CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $\mathbb{P}((X,Y)=(x,y)) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$. Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.	La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.
Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)$ d'une variable aléatoire X. Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	L'espérance est un X indicateur de position. Formule $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée. Exemple : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
Formule de transfert : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X=x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
Variance d'une variable aléatoire réelle, écart-type et covariance	
Variance et écart type d ?une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$. Relation $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable$(X - \mathbb{E}(X))/\sigma(X)$ est centrée réduite.
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d ?une variable binomiale.
Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires finies mutuellement indépendantes et de même loi de moyenne μ et de variance σ^2 et on note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
  Déterminer l'espérance et la variance de M_n en fonction de n, de μ et de σ^2.
  Montrer que :
  $$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$
- Soit $n \geqslant 2$ un entier. On dispose de n urnes numérotés de 1 à n. Dans l'urne k il y a k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche dans celle-ci une boule au hasard. On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
  Déterminer la loi de X, la loi de (X,Y) puis la loi de Y.
- (**en semaine 28 seulement**) On considère une suite infinie de tirages à pile ou face mutuellement indépendants. A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$. Soit S_n la variable aléatoire indiquant le nombre de piles obtenus au cours des n premiers tirages et soit T_n la variable aléatoire définie par $T_n = \exp\left(\frac{S_n}{n}\right)$.
  Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \mathrm{e}^p$.
- Dans cet exercice N est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k \in [\![1, N-1]\!]$. On dispose d'une urne contenant N boules : k boules rouges et $N-k$ boules blanches. Une épreuve aléatoire consiste à effectuer indéfiniment des tirages d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée, dans cette urne. On note B_j l'événement "obtenir une blanche au j-ième tirage", A_j l'événement "on obtient au moins une boule blanche lors des j premiers tirages" et A l'événement "on obtient au moins une boule blanche lors de cette expérience".
  Calculer $\mathbb{P}(A)$.