

Les étudiants faisant partie du TOP30 du concours blanc en maths doivent chercher le maximum d'exercices et me rendre leur travail le mardi et le vendredi de chaque semaine du mois de juin. C'est un devoir à la maison obligatoire pour eux.

Pour les exercices désignés : la personne concernée pourra travailler avec la personne de son choix sur l'exercice considéré.

SÉRIE 1

Exercice 1 : (Anton)

Déterminer la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1+n^2})}} \quad ; \quad g(x) = x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - ex^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 2 : (Baptiste)

Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^3 . On considère la suite (S_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{ka}{n^2}\right)$.

Déterminer trois réels α, β, γ tels que

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha n + \beta + \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 3 : (Lili)

Montrer que \cos possède un unique point fixe sur \mathbf{R} et en déduire qu'il n'existe pas de $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

Exercice 4 : (Martin)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$.

1. Montrer que la série de terme général a_n diverge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

2. Montrer que $S_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1}^2 - S_n^2) = 2$.

On admet le résultat suivant : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels positifs telle que la série de terme général v_n diverge et $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

3. En déduire que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$

4. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \sum_{k=0}^n b_k = 1$.

Exercice 5 : (Fakri)

Montrer que pour tout $n \geq 2$, le polynôme $P_n = X^n + X^2 + X - 2$ admet une unique racine dans \mathbb{R}^+ , notée r_n .

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de r_n .

Exercice 6 : (Anton)

Soit $\alpha > 0$. Etudier la convergence des séries de terme général dans les cas suivants.

Pour la dernière on utilisera que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \quad ; \quad u_n = \ln\left(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right) \quad ; \quad u_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$$

SÉRIE 2

Exercice 1 : (Luc)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, strictement positive sur $[0, 1]$ et vérifiant, pour tout réel $x > 0$;

$$\int_0^x f(t)^2 dt = \frac{1}{x} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2$$

On pose $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que F vérifie une équation différentielle et en déduire f .

Exercice 2 : (Lou)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ continue et surjective.

Montrer que tout réel admet une infinité d'antécédents par f .

Exercice 3 : (Yann)

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Calculer, à l'aide d'une somme de Riemann :

$$I = \int_0^{2\pi} \ln |x - e^{it}| dt$$

Exercice 4 : (Sébastien)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Donner un équivalent de u_n .

(On pourra considérer $v_n = e^{u_n}$ puis la suite $v_{n+1} - v_n$ et utiliser le lemme de Césaro.)

Exercice 5 : (Flavien)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 6 : (Raphaël)

Nature des séries de terme général u_n avec

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad ; \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \quad ; \quad u_n = \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right)$$

$$; \quad u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \quad ; \quad u_n = \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)} \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$$

SÉRIE 3

Exercice 1 : (Michaël)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbf{R})$ décroissante. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note

$$I_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + \cos^2(nt)} \quad ; \quad J_n = \int_0^\pi \frac{f(t)}{1 + \cos^2(nt)} dt$$

1. Montrer que $I_n = I_1$ pour tout n et calculer cette valeur.
2. Montrer que (J_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 : (Célia)

Soit f et g deux fonctions continues sur $]a, b[$, dérivables sur $]a, b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Justifier que $g(a) \neq g(b)$, puis montrer :

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Exercice 3 : (Hadrien)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. On suppose de plus f dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{dt}{f(t)}$$

Exercice 4 : (Manoé)

Résoudre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$ puis déterminer la nature, selon les valeurs de $\alpha > 0$, de la série de terme général :

$$u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor}{n^\alpha}$$

Exercice 5 : (Grégoire)

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Notons $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, notons :

$$a_n = \min \left\{ p \in \mathbf{N}^* \mid \sum_{k=1}^p f(k) \geq n \right\} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, a_n est bien défini et que $a_n \geq n$.
2. Dans cette question on suppose que $\alpha \in]0, 1[$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que : $S_{a_n} - n < \frac{1}{a_n^\alpha}$
En déduire un équivalent de a_n .
3. Dans cette question on suppose que $\alpha = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$1 - \frac{1}{a_n} \leq S_{a_{n+1}} - S_{a_n} < 1 + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Montrer que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

SÉRIE 4

Exercice 1 : (Grégoire)

On pose $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

Étudier la nature de la (u_n) , puis des séries suivantes

$$\sum (-1)^n u_n \quad ; \quad \sum u_n^2 \quad ; \quad \sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \quad ; \quad \sum u_n$$

Exercice 2 : (Victor G.)

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ continues avec $g \geq 0$. Montrer que

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$$

Exercice 3 : (Baptiste)

Nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}$$

On remarquera que $\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^n (u_{2k} + u_{2k-1})$.

Exercice 4 : (Lou)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite positive décroissante telle que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

1. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pourra utiliser $r_n = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.
 2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$.
 3. Soit $p \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$.
Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
-

Exercice 5 : (Yann)

Soit f une application dérivable sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans \mathbf{R} telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(a)$.

Montrer que f' s'annule sur $]a, +\infty[$.

Exercice 6 : (Martin)

Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable.

On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $|f'| \leq k|f|$ sur \mathbf{R}_+ .

1. Montrer que $g = |f|$ est dérivable sur \mathbf{R}_+ .
On traitera les cas $f(t) = 0$ et $f(t) \neq 0$.
 2. Montrer que si f s'annule alors f est la fonction nulle.
-

Exercice 7 : (Flavien)

Soit f une application dérivable sur $[a, b]$.

Montrer que $f'([a, b])$ est un intervalle.

On pourra commencer par montrer que si $f'(a)f'(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

SÉRIE 5 : ORAUX

Exercice 1 : Centrale 2023

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} s'annulant en 0.

Pour tout $f \in E$, on définit $\varphi(f) : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ .
3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer les solutions de $\varphi(f) = \lambda f$.

Exercice 2 : Centrale 2023

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto x - \ln(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$\phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

1. Montrer que la fonction Φ est bien définie.
2. Étudier la fonction Φ sur \mathbb{R}^{+*} .
3. Montrer que Φ se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 en 0.

Exercice 3 : Centrale 2023

On donne pour $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$.

1. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{a_n}$?
3. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de termes strictement positifs qui tend vers $+\infty$.

Peut-on affirmer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sum_{k=1}^n u_k}$ est convergente ?

Exercice 4 : Centrale 2023

On notera dans tout l'exercice $\mathcal{D} = \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}$ et n un entier naturel non nul.

On admet que pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ la quantité $S_P = \sup_{z \in \mathcal{D}} |P(z)|$ est bien définie.

1. Soit P un polynôme de $\mathbf{C}[X]$.
 - (a) Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $P(X) = 1 + \alpha X^n$.
Montrer que si $S_P = 1$ alors $P = 1$.
 - (b) Montrer que si P est un polynôme à coefficients complexes tel que $S_P = |P(0)|$ alors P est un polynôme constant.
2. On suppose maintenant que P est un polynôme à coefficients réels tel que $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| = |P(0)|$. P est-il constant ?

Exercice 5 : Mines 2023

Nature de la série $\sum u_n$ et valeur de la somme pour

$$u_n = (-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2) dt$$

SÉRIE 6 : ORAUX

Exercice 1 : Mines 2024

On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ avec $\alpha > 0$. Nature de $\sum e^{-a_n}$.

Exercice 2 : Mines 2024

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sqrt{k} \quad ; \quad v_n = a_n + \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{2}$$

Nature de (v_n) et de $\sum(1/a_n)$.

Exercice 3 : Centrale 2024

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ concave et de limite nulle. Pour les réels x en lesquels l'expression a un sens on pose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'(nx)$$

Existence de g et équivalent en 0.

Exercice 4 : Mines 2025

Soit (X_n) suite de va i.i.d. de Bernoulli de paramètre $x \in [0, 1]$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue. On pose

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad P_n(x) = \mathbb{E} \left(\frac{S_n(x)}{n} \right)$$

1. Justifier que P_n est une fonction polynomiale en x et montrer que $P_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$.
 2. On suppose que f est \mathcal{C}^1 . Montrer que $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
-

Exercice 5 : X 2024

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telles que $f(t)^2 = f(\sqrt{2}t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 6 : X 2024

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge de somme $A > 0$.

Quelles sont les valeurs que peut prendre $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?