

Les étudiants faisant partie du TOP30 du concours blanc en maths doivent chercher le maximum d'exercices et me rendre leur travail le mardi et le vendredi de chaque semaine du mois de juin. C'est un devoir à la maison obligatoire pour eux.

Pour les exercices désignés : la personne concernée pourra travailler avec la personne de son choix sur l'exercice considéré.

## SÉRIE 1

**Exercice 1 : (Anne-Lise)**

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .

- Déterminer le déterminant de  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $u(M) = M^T$ .
- Dans cette question on munit  $E$  de sa norme euclidienne canonique définie par  $\|M\| = \sqrt{\text{Tr}(M^T M)}$  et on note  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille  $n$ .  
Soit  $M \in E$ . Déterminer

$$d(M, \mathcal{S}_n(\mathbf{R})) = \inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})} \|M - S\|$$

**Exercice 2 : (Flavien)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ .

- Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que si  $p$  est un projecteur alors  $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$ . La réciproque est-elle vraie ?
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^m = id_E$ . Montrer que  $p = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$  est un projecteur.
- Montrer que  $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \text{tr}(u^k) = \dim(\text{Ker}(u - id_E))$ .

**Exercice 3 : (Luc)**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  vérifiant  $A^T A = I_n$ .

- On note  $A = [C_1 \mid \dots \mid C_n]$  la présentation en colonnes de  $A$ .  
Montrer que  $(C_1, \dots, C_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique.
- Montrer que  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$  puis que  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n^2$ .
- Montrer qu'en fait on a  $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$ .
- Montrer que  $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$ .

**Exercice 4 : (Grégoire)**

Soit  $E$  espace euclidien. On suppose que  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs orthogonaux et que  $p \circ q$  est encore un projecteur.

- Montrer que  $\|p(x)\| \leq \|x\|$  et que  $\langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$  pour tout  $(x, y) \in E^2$ .
- Montrer que  $\|(p \circ q)(x)\| \leq \|x\|$  et en déduire que  $p \circ q$  est un projecteur orthogonal.
- Montrer que  $p \circ q = q \circ p$ .

**Exercice 5 : (Maëli)**

Soit  $E, F, G$  des  $\mathbf{C}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Montrer que

$$v \circ u \text{ isomorphisme} \iff \begin{cases} v \text{ surjective} \\ u \text{ injective} \\ \text{Im}u \oplus \text{Ker}v = F \end{cases}$$

Que dire si  $E, F$  et  $G$  sont de dimension infinie ?

## SÉRIE 2

**Exercice 1 : (Manoé)**

Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$  non nulle et  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  un  $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie.

Montrer que  $\text{Ker}(\varphi)$  est stable par  $u$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  tel que  $\varphi \circ u = \lambda \varphi$ .

**Exercice 2 : (Yann)**

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $z$  un complexe. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( z + e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^n = n(z^n + 1)$$

En déduire

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left( \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n \left( \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) = 0$$

**Exercice 3 : (Victor G.)**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Calculer  $S_n = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|$  et interpréter géométriquement.

**Exercice 4 : (Anton)**

Déterminer

$$\sup_{|z| \leq 1} |z^3 + 2iz|$$

**Exercice 5 : (Célia)**

Soit  $\omega \in \mathbb{U}_n$  avec  $n \geq 3$ . Montrer que

$$(\omega - 1)(\omega^{n-2} + 2\omega^{n-3} + \dots + (n-2)\omega) + (n-1) = -n$$

En déduire que  $|1 - \omega| \geq \frac{2}{n-1}$  puis que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \left| \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right| \geq \frac{1}{n-1}$$

**Exercice 6 : (Baptiste)**

Déterminer

$$m = \inf_{z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}} \left( \frac{\text{Im}(z^5)}{(\text{Im}(z))^5} \right)$$

**Exercice 7 : (Sébastien)**

Soient  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On suppose  $AB - BA = B$ .

Pour  $k \in \mathbf{N}$ , montrer que  $AB^k = B^k(A + kI_n)$ .

**Exercice 8 : (Fakri)**

Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels de dimension finie et  $v \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $f \in \mathcal{L}(F, G)$ .

Montrer que :  $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(f) \iff \exists u \in \mathcal{L}(E, F), v = f \circ u$

## SÉRIE 3

**Exercice 1 : (Lili)**

Soient  $E$  un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$ . On pose  $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$ .  
 Montrer qu'il existe  $a \in E$  tel que  $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .  
 En déduire que  $(id_E, f, \dots, f^{n-1})$  est une base de  $\mathcal{C}$ .

---

**Exercice 2 : (Lou)**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, E)$  tels que  $f \circ g \circ f = f$ .  
 Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont des projecteurs puis établir que  $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f \circ g) = \text{Im}(f)$ .  
 En déduire que  $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g \circ f) = \text{Ker}(f \circ g) \oplus \text{Im}(f)$ .

---

**Exercice 3 : (Michaël)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  
 Déterminer tous les couples  $(f, g)$  d'endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = f$  et  $g \circ f = g$ .

---

**Exercice 4 : (Martin)**

Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ .  
 Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Ker}(u) = G$  et  $\text{Im}(u) = F$ .

---

**Exercice 5 : (Hadrien)**

Soient  $E, F$  des espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $p$ , et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, E)$ . On suppose que  $u \circ v = id_F$ .  
 Montrer que  $v \circ u$  est un projecteur. Déterminer son rang, son image, son noyau.

---

**Exercice 6 : (Flavien)**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension  $n \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, E)$ .  
 On suppose  $f \circ g = 0$  et qu'il existe  $f_1 \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g_1 \in \mathcal{L}(F, E)$  tels que  $f \circ g_1 + f_1 \circ g = id$ .  
 Montrer que  $\text{Im}(g) = \text{Ker}(f)$ .

---

**Exercice 7 : (Yann)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ . On pose :  $m = \max(|a_k|, k \in [0, n-1])$   
 Montrer que si  $z$  est racine de  $P$  alors  $|z| \leq 1 + m$ .

---

**Exercice 8 : (Baptiste)**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  unitaire de degré  $n$ .

1. Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbf{R}$  si et seulement si :  $\forall z \in \mathbb{C}, |\text{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$
2. Soit  $(P_n)_{n \geq 0}$  une suite de polynômes unitaires  $\mathbf{R}[X]$  de degré  $n$ , scindés sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad P_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P(z)$$

Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbf{R}$ .

## SÉRIE 4

**Exercice 1 :**

Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$ , que l'on écrit  $P = P_1 + iP_2$  avec  $P_1, P_2$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .  
On suppose que  $\text{Im}(z) < 0$  pour toute racine  $z$  de  $P$ .

1. Soit  $z \in \mathbf{C}$ . Montrer que si  $|P(z)| = |P(\bar{z})|$  alors  $z$  est réel.
2. En déduire que  $P_1$  est scindé sur  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  de rang 1.

1. Soit  $A$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .  
Montrer que  $A + H$  est inversible si, et seulement si  $\text{tr}(HA^{-1}) \neq -1$ .  
*On commencera par étudier le cas  $A = I_n$ .*
2. Vérifier que :

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \text{tr}(HA^{-1})} A^{-1} H A^{-1}$$

**Exercice 3 :**

Soit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  la fonction  $f : M \mapsto M + \text{tr}(M)I_n$ .

1. Montrer que  $f$  est un isomorphisme.
2. Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  telle que  $f(M) = N$ . Exprimer  $M$  en fonction de  $N$ .

**Exercice 4 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Montrer que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$  si et seulement si il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telle que  $AB = BA, A^2B = A$  et  $B^2A = B$ .

**Exercice 5 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbf{R})$ . On suppose que  $A^3 = 0$  et que  $\text{rg}(A) = 2n$ .

Montrer qu'il existe  $P \in GL_{3n}(\mathbf{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6 :**

Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$  et  $a_0, \dots, a_n$  des réels distincts. Pour  $(P, Q) \in E^2$ , on pose

$$\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k)$$

1. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Déterminer une base orthonormée de  $E$ .  
*On aura une pensée émue pour Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).*
3. Soit  $Q \in E$  fixé quelconque.

Déterminer la distance de  $Q$  au sous-espace  $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$ .

**Exercice 7 :**

Soit  $a < b$  deux réels et  $f, g$  des éléments de  $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ . On suppose que  $fg \geq 1$ . Montrer que

$$\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b g(t) dt \geq (b-a)^2$$

## SÉRIE 5

**Exercice 1 : Centrale 2023**

Soit  $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . On pose  $(f|g) = \int_0^1 (fg + f'g')$  pour tout  $(f, g) \in E^2$ . On définit :

$$F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } G = \{f \in E, f'' = f\}.$$

1. Montrer que  $(\cdot|\cdot)$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Donner une base orthonormée de  $G$  pour ce produit scalaire.
3. Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux.

**Exercice 2 : Centrale 2023**

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on a  $a_{i,j} \geq 0$  et, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ .

On note  $\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n,1}\}, AX = \lambda X\}$  le spectre (complexe) de  $A$ .

1. Montrer que  $1 \in \text{Sp}(A)$ , puis que si  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $|\lambda| \leq 1$ .
2. On suppose dans cette question que  $a_{i,j} > 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .  
Montrer que  $\text{Sp}(A) \cap \mathbb{U} = \{1\}$ .
3. On revient au cas général.  
Montrer que si  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  avec  $|\lambda| = 1$ , alors  $\lambda$  est une racine de l'unité.  
Que peut-on dire de plus si les termes diagonaux de  $A$  sont tous strictement positifs ?

**Exercice 3 : Centrale 2023**

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $g \in \mathcal{L}(E)$  est un pseudo inverse de  $f$  si :

$$f \circ g \circ f = f, \quad g \circ f \circ g = g, \quad \text{et} \quad f \circ g = g \circ f$$

1. Que peut-on dire si  $f$  est inversible ? Et si  $f$  est l'application nulle ?
2. (a) Montrer que si  $f$  a un pseudo inverse, alors  $\text{Im}f \oplus \text{Ker}f = E$ .  
(b) Montrer que si  $\text{Im}f \oplus \text{Ker}f = E$ , alors  $f_1 = f|_{\text{Im}f}$  a un pseudo-inverse.  
En déduire que  $f$  a un pseudo-inverse. Conclure.
3. Montrer que  $f$  a un pseudo-inverse si et seulement si  $\text{rg}f = \text{rg}f^2$ .

**Exercice 4 : Centrale 2023**

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des réels distincts de  $[0, \pi]$ . On note  $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  la matrice définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \cos((j-1)a_i)$$

On note aussi  $\Delta_n = \det M_n$ , et  $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos(a_j) - \cos(a_i))$ .

1. Calculer  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  en fonction de  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un polynôme  $Q_j$  de  $\mathbf{R}[X]$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad m_{i,j} = Q_j(\cos(a_i))$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de  $Q_j$ .

3. En déduire l'expression de  $\Delta_n$  en fonction de  $P_n$ .

## SÉRIE 6

**Exercice 1 : Mines 2024**

Déterminer les sev de  $\mathbf{K}[X]$  stables par  $P \rightarrow D(P) = P'$ .

Si  $F$  est un sev stable on examinera le cas où le degré des éléments de  $F$  est majoré, ou non.

**Exercice 2 : Centrale 2019**

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Considérons  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$   $n-1$  réels distincts deux à deux. Définissons pour tout  $x$  dans  $\mathbf{R}$ ,

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^{n-2} & x^n \end{vmatrix}.$$

1. (a) Montrer que  $P$  est une fonction polynomiale pour laquelle vous déterminerez son degré ainsi que son coefficient dominant.
- (b) Ecrire  $P$  sous forme de produit de polynômes irréductibles.

2. Soient  $b_1, b_2, \dots, b_n$   $n$  réels. Calculer
 
$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1^{n-2} & b_1^n \\ 1 & b_2 & \cdots & b_2^{n-2} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{n-1} & \cdots & b_{n-1}^{n-2} & b_{n-1}^n \\ 1 & b_n & \cdots & b_n^{n-2} & b_n^n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 3 : ENS 2025**

Soit  $A, B, C, D, E$  des espaces vectoriels de dimensions finies et  $f_i, g_i, h_i$  des applications linéaires.

On note  $A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C$  quand  $\text{Im}(f_1) = \text{Ker}(f_2)$ .

1. Que dire sur  $f_1$  et  $f_2$  quand  $A = \{0\}$  ? et quand  $C = \{0\}$  ? Que dire de  $f_1$  et  $f_2$  quand on a  $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \rightarrow \{0\}$  ?
2. On considère le schéma suivant que l'on suppose commutatif (i.e. tout chemin menant de  $X$  à  $Y$  donne des composées égales).

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \rightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \rightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \\ \{0\} & \rightarrow & D & \xrightarrow{g_1} & E & \xrightarrow{g_2} & F & \rightarrow & \{0\} \end{array}$$

Montrer que si  $h_1$  et  $h_3$  sont des isomorphismes alors  $h_2$  est un isomorphisme.

**Exercice 4 : X 2025**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces euclidiens et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On note  $\pi_1$  la projection orthogonale de  $E$  sur  $(\text{Ker}u)^\perp$  et  $\pi_2$  la projection orthogonale de  $F$  sur  $\text{Im}u$ .

1. Justifier que  $u$  induit un isomorphisme de  $(\text{Ker}u)^\perp$  sur  $\text{Im}u$ . On note  $\tilde{u}$  cet isomorphisme. Justifier que  $u \circ \tilde{u}^{-1} \circ \pi_2 = \pi_1$ .
2. Soit  $b \in F$ . montrer que  $d(b, \text{Im}u)$  est bien définie, est atteinte, et déterminer un élément de  $E$  de norme minimale où elle est atteinte.