Table des matières

I Notions fondamentales

Définition 1: (opérations sur les ensembles)

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

✓ La **réunion** (ou **union**) $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B.

✓ L'**intersection** $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont à la fois dans A et dans B.

✓ La **différence** $A \backslash B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et qui ne sont pas dans B.

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

✓ Le **complémentaire de** A **dans** E, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
On a donc $\overline{A} = E \backslash A$.

Définition 2: (produit cartésien)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'ensembles.

Le **produit cartésien** des ensembles E_i est définie par :

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \; ; \; \forall\, i \in [\![1, n]\!] \; , \; x_i \in E_i\}$$

En particulier, $E^2 = E \times E$ et $E^n = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.
Un élément de E^n est appelé une n**-liste** d'éléments de E (ou n**-uplet** d'éléments de E).
Un 2-uplet est un **couple** et un 3-uplet est un **triplet**.

Définition 3: (recouvrement et partition)

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E.

✓ On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement** de E si $E = \bigcup_{i \in I} A_i$.

✓ On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement disjoint** de E si $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ et si $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$.

✓ On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de E si c'est un recouvrement disjoint vérifiant $A_i \neq \varnothing$ pour tout $i \in I$.

Définition 4: (vocabulaire sur les applications)

Soit E et F deux ensembles.

✓ Une **fonction** (ou **application**) f de E vers F est un procédé qui associe à chaque élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.
Une application de E dans F est aussi appelée **famille d'éléments de F indexée par** E.

✓ Soit $f : E \to F$ une application.
E est l'**ensemble de départ** (ou **ensemble de définition**) de f et F est l'**ensemble d'arrivée** de f.
Si $(x,y) \in E \times F$ vérifie $f(x) = y$ on dit que y **est l'image de** x et que x **est un antécédent de** y.
L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x))\ ;\ x \in E\}$ est le **graphe** de f. On a $\Gamma \subset E \times F$.

✓ Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. L'**image directe de** A **par** f est

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A\ ,\ y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé l'**ensemble image de** f (ou **image de** f).

✓ Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. L'**image réciproque de** B **par** f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$$

✓ L'**application identité** de E est l'application $\mathrm{Id_E} : E \to E$ définie par $\mathrm{Id_E}(x) = x$ pour tout x de E.

✓ Si $A \subset E$ la **fonction indicatrice** de A est l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$

✓ Si $A \subset E$ la **restriction de** f **à** A est l'application $f_{|A}$ définie par :

$$f_{|A} : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

✓ Si G, H sont des ensembles et $g : G \to H$ une application.
On dit que g est un **prolongement de** f (à G) si :

$$\begin{cases} E \subset G \text{ et } F \subset H \\ \forall x \in E\ ,\ g(x) = f(x) \end{cases}$$

✓ On dit que f est **injective** si : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$
Cela revient à dire que tout élément $y \in F$ ne possède qu'au plus un antécédent.

✓ On dit que f est **surjective** si : $\quad \forall y \in F\ ,\ \exists\, x \in E\ , \quad f(x) = y$
Cela revient à dire que tout élément $y \in F$ possède au moins un antécédent.

✓ On dit que f est **bijective** si : $\quad \forall y \in F\ ,\ \exists\,!\, x \in E\ , \quad f(x) = y$
Cela revient à dire que tout élément $y \in F$ possède exactement un antécédent.

✓ Si f est bijective la **bijection réciproque** de f est l'application $f^{-1} : F \to E$ qui à tout y de F associe l'unique antécédent de y par f.

Définition 5: (variations)

Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une application avec $D \subset \mathbf{R}$.

✓ On dit que f est **croissante** sur D si : $\forall (x,y) \in D^2$, $(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$
Pour **strictement croissante** on demande $(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$.

✓ On dit que f est **décroissante** sur D si : $\forall (x,y) \in D^2$, $(x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y))$
Pour **strictement décroissante** on demande $(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.

✓ On dit que f est **monotone** sur D si elle ne change pas de variation sur D.
Cela revient à dire qu'elle est soit croissante sur D, soit décroissante sur D.
On définit de même une fonction **strictement monotone** sur D.

Définition 6: (parité et périodicité)

Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une application avec $D \subset \mathbf{R}$.

✓ On dit que f est **paire** si : $\forall x \in D$, $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

✓ On dit que f est **impaire** si : $\forall x \in D$, $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

✓ On dit que $T \in \mathbf{R}$ est une **période de** f si : $\forall x \in D$, $\begin{cases} (x+T) \in D \text{ et } (x-T) \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$

On dit que f est **périodique** si il existe une période $T \in \mathbf{R}^*$ de f.

Remarque 1: axe de symétrie et centrale de symétrie ♡

✓ La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $f(a-x) = f(a+x)$ pour tout $x \in D$.
Quand on aura une égalité du type $f(x) = f(b-x)$ on résoudra $x = b - x$ pour trouver la valeur de a.
✓ Le point $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$ si et seulement si $f(a-x) + f(a+x) = 2b$ pour tout $x \in D$.

Définition 7: (notion de cardinal)

Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est **fini** si il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et une bijection $f : E \to [\![1,n]\!]$.
L'entier n est alors unique et est appelé le **cardinal** de E. On note $\mathrm{Card}(E) = n$ ou $|E| = n$.
Par convention, $E = \varnothing$ est fini $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$. Un ensemble qui n'est pas fini est **infini**.

Définition 8: (outils de dénombrements)

Soit E un ensemble fini possédant $n \in \mathbf{N}^*$ éléments et p un entier naturel non nul.

✓ Un élément de E^p est appelé un p**-uplet** (ou une p**-liste**) d'éléments de E.

✓ Un p**-uplet sans répétition** de E est un p-uplet d'éléments de E dont les éléments sont deux à deux distincts.

✓ Une **permutation** de E est une liste d'éléments de E contenant exactement une fois chaque élément de E.

✓ Si $p \in [\![0,n]\!]$, une p**-combinaison** de E est une partie de E à p éléments.

Définition 9: (fonctions réelles à valeurs complexes)

Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une application de variable réelle à valeurs complexes.

✓ La **partie réelle de** f et la partie imaginaire de f sont les applications

$$\mathrm{Re}(f) : \left| \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}\left(f(x)\right) \end{array} \right. \quad ; \quad \mathrm{Im}(f) : \left| \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}\left(f(x)\right) \end{array} \right.$$

✓ Le **module de** f et la **conjuguée de** f sont les applications

$$|f| : \left| \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array} \right. \quad ; \quad \overline{f} : \left| \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & \overline{f(x)} \end{array} \right.$$

✓ On dit que f **est bornée sur** I si $|f|$ est bornée sur I.

✓ On dit que f est **continue en** x_0 si f admet une limite finie en x_0 égale à $f(x_0)$.

✓ On dit que f est **dérivable en** x_0 si $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbf{C}$.
Le nombre ℓ, noté $f'(x_0)$, est alors appelé le **nombre dérivé de** f **en** x_0.

✓ On dit que $F : I \to \mathbf{C}$ est une **primitive de** f **sur** I si F est dérivable sur I et que $F' = f$.

✓ Si f est continue sur I et que $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$ on appelle **intégrale de** f **sur** $[a,b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\mathrm{Re} f)(x)dx + \mathrm{i}\int_a^b (\mathrm{Im} f)(x)dx$$

✓ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On dit que f est k**-fois dérivable sur** I si on peut dériver f et ceci k fois successivement sur I.
Cela définit alors une application $f^{(k)}$ appelée **dérivée** k**-ième** de f sur I. On pose $f^{(0)} = f$ et on a $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$.

✓ On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^k$ **sur** I si f est k-fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note $\mathscr{C}^k(I,\mathbf{C})$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$.
On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **sur** I si f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
On note $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbf{C})$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Définition 10: (topologie de $\mathbf{R}^2$)

Soit U une partie de $\mathbf{R}^2$ et p un point de $\mathbf{R}^2$.

✓ Soit $r > 0$. On appelle **boule ouverte de centre** p **et de rayon** r l'ensemble

$$B(p,r) = \{q \in \mathbf{R}^2 \mid \|q-p\| < r\}$$

✓ On dit que U est un **ouvert de** $\mathbf{R}^2$ si pour tout point de U on peut trouver une boule ouverte centrée en ce point et entièrement contenue dans U.

$$\forall p \in U\ ,\ \exists r > 0\ , \qquad B(p,r) \subset U$$

Définition 11: (applications partielles et dérivées partielles)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}$ avec $p_0 = (x_0, y_0) \in U$.
On note $D_{1,y_0} = \{x \in \mathbf{R} \mid (x, y_0) \in U\}$ et $D_{2,x_0} = \{y \in \mathbf{R} \mid (x_0, y) \in U\}$.

✓ Les **applications partielles** de f en p_0 sont les deux applications suivantes :

$$f_{1,y_0} : \left| \begin{array}{ccc} D_{1,y_0} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f_{1,y_0}(x) = f(x, y_0) \end{array} \right. \quad ; \quad f_{2,x_0} : \left| \begin{array}{ccc} D_{2,x_0} & \to & \mathbf{R} \\ y & \mapsto & f_{2,x_0}(y) = f(x_0, y) \end{array} \right.$$

✓ On dit que f admet une **dérivée partielle première par rapport à la première variable** en p_0 si l'application partielle f_{1,y_0} est dérivable en x_0. La valeur $f'_{1,y_0}(x_0)$ est alors appelée la dérivée partielle de f par rapport à x en p_0, et se note

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{1,y_0}(x_0)$$

✓ On dit que f admet une **dérivée partielle première par rapport à la seconde variable** en p_0 si l'application partielle f_{2,x_0} est dérivable en y_0. La valeur $f'_{2,x_0}(y_0)$ est alors appelée la partielle de f par rapport à y en p_0, et se note

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{2,x_0}(y_0)$$

Définition 12: (continuité pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}$.

✓ Soit $p_0 \in U$ et $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f **tend vers** ℓ **en** p_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \ , \ \forall q \in U \ , \qquad \|q - p_0\| \leqslant \alpha \implies |f(q) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On écrira alors $f(p) \xrightarrow[p \to p_0]{} \ell$.
✓ Soit $p_0 \in U$. On dit que f est **continue en** p_0 si $f(p) \xrightarrow[p \to p_0]{} f(p_0)$.
On dit que f est **continue** sur U si f est continue en tout point $p \in U$.
On note $\mathscr{C}(U, \mathbf{R})$ ou $\mathscr{C}^0(U, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur U.

Définition 13: (caractère $\mathscr{C}^1$ pour une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}$.

✓ On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^1$ sur** U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et que les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.
On note $\mathscr{C}^1(U, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Définition 14: (gradient, dérivée directionnelle en un point)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

✓ Le **gradient de** f est l'application

$$\nabla f : \left| \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbf{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & \nabla f(u, v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u, v), \dfrac{\partial f}{\partial y}(u, v) \right) \end{array} \right.$$

✓ Si $p \in U$ et $q = (h, k) \in \mathbf{R}^2$ on appelle **dérivée de** f **en** p **selon le vecteur** q le nombre dérivée en 0 de l'application $t \mapsto f(p + tq)$. On le note

$$D_q f(p) = h \frac{\partial f}{\partial x}(p) + k \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

Remarque 2: plan tangent

✓ Le **plan tangent** au graphe de f en $p(x_0, y_0)$ est le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

C'est le plan de $\mathbf{R}^3$ passant par $(p_0, f(p_0))$ et engendré par la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ où

$$\overrightarrow{u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \quad ; \quad \overrightarrow{u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \quad ; \quad \overrightarrow{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

Définition 15: (extrema d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$)

Soit D une partie non vide de $\mathbf{R}^2$ et $f : D \to \mathbf{R}$ et $p_0 \in D$.

✓ On dit que f admet un maximum en p_0 si : $\quad \forall p \in D\ , \quad f(p) \leqslant f(p_0)$

✓ On dit que f admet un minimum en p_0 si : $\quad \forall p \in D\ , \quad f(p) \geqslant f(p_0)$

✓ On dit que f admet un **maximum local** en p_0 si il existe une boule ouverte où la restriction de f admet un maximum en p_0.

$$\exists r > 0\ ,\ \forall p \in B(p_0, r) \cap D\ , \qquad f(p) \leqslant f(p_0)$$

✓ On dit que f admet un **minimum local** en p_0 si il existe une boule ouverte où la restriction de f admet un minimum en p_0.

$$\exists r > 0\ ,\ \forall p \in B(p_0, r) \cap D\ , \qquad f(p) \geqslant f(p_0)$$

✓ On dit que f admet un **extremum** (resp. **extremum local**) en p_0 si f admet un maximum (resp. **maximum local**) ou un minimum (resp. **minimum local**) en p_0.

✓. On dit que p_0 est un **point critique** de f si $\nabla f(p_0) = 0$, c'est à dire si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0 \end{cases}$$

II Nombres réels et complexes

Définition 16: (maximum, minimum, bornes inférieures et supérieures)

Soit A une partie de $\mathbf{R}$.

✓ On dit que $M \in \mathbf{R}$ est un **majorant** de A si : $\forall x \in A\ ,\ x \leqslant M$
Si A possède au moins un majorant on dit que A est **majorée**.

✓ On dit que $m \in \mathbf{R}$ est un **minorant** de A si : $\forall x \in A\ ,\ x \geqslant m$
Si A possède au moins un minorant on dit que A est **minorée**.

✓ On dit que A est une **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

✓ On dit que M est un **maximum** de A si M est un majorant de A et que $M \in A$.
On parle alors de **plus grand élément** de A.

✓ On dit que m est un **minimum** de A si m est un minorant de A et que $m \in A$.
On parle alors de **plus petit élément** de A.

✓ On dit que A possède **une borne supérieure** si l'ensemble des majorants de A possède un minimum.
Ce plus petit majorant est alors une borne supérieure de A.

✓ On dit que A possède **une borne inférieure** si l'ensemble des minorants de A possède un maximum.
Ce plus grand minorant est alors une borne inférieure de A.

Définition 17: (formes algébriques et exponentielles, module et arguments)

✓ Un **nombre complexe** est un nombre s'écrivant sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbf{C}$.

✓ L'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ est unique est on l'appelle la **forme algébrique** de z.
La **partie réelle** de z est $a = \mathrm{Re}(z)$ et la **partie imaginaire** de z est $b = \mathrm{Im}(z)$.
✓ Un nombre complexe z est **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$.
L'ensemble des imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbf{R}$.

✓ Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$.

✓ Pour $t \in \mathbf{R}$ on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} := \cos t + \mathrm{i}\sin t$.
Si $z = a + \mathrm{i}b$ est un nombre complexe écrit sous forme algébrique on appelle **exponentielle** de z le nombre complexe

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{a}(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$$

✓ Le **module** d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ est le nombre réel positif $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \times \bar{z}}$.
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

✓ Un **argument** d'un nombre complexe $z \in \mathbf{C}^*$ est un réel θ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Il existe une infinité d'arguments pour z mais un seul appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$: on l'appelle l'**argument principal de** z.

✓ Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$ on appelle **forme trigonométrique** de z une écriture du type $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ou $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$.

Définition 18: (racine de l'unité)

Soit $a \in \mathbf{C}$ et $\alpha \in \mathbf{C}$.

✓ On dit que α est une **racine n-ième de** a si α est racine de la fonction polynômiale définie par $P(z) = z^n - a$.
Si $a = 1$ on parle de **racine n-ième de l'unité**. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

III Suites et séries numériques

Définition 19: (notion de suite)

✓ Une **suite** d'éléments de $\mathbf{K}$ est une application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{K}$.
On note $u_n = u(n)$ le **terme de rang** n et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ou (u_n), ou même u cette suite.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ se note $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. On parle de suite réelle si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et de suite complexe si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Définition 20: (suites bornées, suites stationnaires et suites extraites)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle ou complexe.

✓ On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **bornée** si : $\exists M \in \mathbf{R}_+^*\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ |u_n| \leqslant M$

✓ On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **stationnaire** si : $\exists n_1 \in \mathbf{N}\ ,\ \forall n \geqslant n_1\ ,\ u_n = u_{n_1}$

✓ On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **constante** si elle est stationnaire à partir de $n_1 = 0$.

✓ Une **suite extraite** (ou **sous-suite**) de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ où $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante.

Définition 21: (majoration, minoration et monotonie des suites réelles)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

✓ Cette suite est **majorée** si : $\exists M \in \mathbf{R}_+^*\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_n \leqslant M$
On dit que M est une **majorant** de (u_n).

✓ Cette suite est **minorée** si : $\exists m \in \mathbf{R}_-^*\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_n \geqslant m$
On dit que m est une **minorant** de (u_n).

✓ Cette suite est **croissante** si : $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} \geqslant u_n$
On dit que la suite est **strictement croissante** si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

✓ Cette suite est **décroissante** si : $\forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} \leqslant u_n$
On dit que la suite est **strictement décroissante** si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

✓ Cette suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Définition 22: (suites classiques)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.

✓ On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **arithmétique** si : $\exists r \in \mathbf{K}\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n + r$
On dit que r est la **raison** de la suite.

✓ On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **géométrique** si : $\exists q \in \mathbf{K}\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = q \times u_n$
On dit que q est la **raison** de la suite.

✓ On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **arithmético-géométrique** si : $\exists (a,b) \in \mathbf{K}^2\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = au_n + b$

✓ On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** si : $\exists (a,b) \in \mathbf{K}^2\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Définition 23: (limite finie)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.

✓ Soit $\ell \in \mathbf{K}$. On dit que (u_n) admet ℓ comme **limite finie** si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ ,\ \forall n \geqslant n_0\ ,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
✓ On dit que (u_n) **converge** si il existe $\ell \in \mathbf{K}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Dans ce cas on dit que (u_n) converge vers ℓ.

✓ On dit que (u_n) **diverge** si elle ne converge pas.

Définition 24: (limite infinie pour une suite réelle)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

✓ On dit que (u_n) possède une **limite égale à** $+\infty$ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) si : $\forall M \in \mathbf{R}_+^*\ ,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ ,\ \forall n \geqslant n_0\ ,\ u_n \geqslant M$
✓ On dit que (u_n) possède une **limite égale à** $-\infty$ (et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$) si : $\forall M \in \mathbf{R}_-^*\ ,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ ,\ \forall n \geqslant n_0\ ,\ u_n \leqslant M$

Définition 25: (suites adjacentes)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
On dit que (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante, et que $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Définition 26: (relations de comparaison)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes telles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang n_0.

✓ On dit que (u_n) **est équivalente à** (v_n) (on note $u_n \sim v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 1.

✓ On dit que (u_n) **est négligeable devant** (v_n) (on note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 0.

✓ On dit que (u_n) **est dominée par** (v_n) (on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ou $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$) si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.

Remarque 3: reformulation usuelle ♡

✓ On a $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ si et seulement si il existe une suite $(w_n) \to 0$ telle que $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang.
✓ On a $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si et seulement s'il existe une suite (w_n) bornée telle que $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang.
✓ On a $u_n \sim v_n$ si et seulement s'il existe une suite $(w_n) \to 1$ telle que $u_n = v_n w_n$ à partir d'un certain rang.

Définition 27: (vocabulaire des séries numériques)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.

✓ On appelle **série de terme général** u_n, et on note $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ (ou $\sum u_n$), la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
On appelle S_n **somme partielle d'indice** n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

✓ On dit que la **série** $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_n) est convergente. Dans ce cas, la limite de cette suite est alors appelée **somme de la série** et on la note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

✓ Si la série $\sum u_n$ converge on appelle **reste d'indice** n de la série $\sum u_n$ le nombre $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

✓ On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.
On dit aussi dans ce cas que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est **sommable**.

IV Systèmes linéaires et matrices

Définition 28:

✓ Un **système linéaire à n équations et p inconnues** $(\mathscr{S})$ est un système d'équations du type

$$(\mathscr{S})\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots & \ \ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p & = b_n \end{cases}$$

où les $x_i \in \mathbf{K}$ sont les **inconnues**, les $a_{i,j} \in \mathbf{K}$ sont les **coefficients** et les $b_i \in \mathbf{K}$ forment le **second membre** du système.
On dit que le système est **carré** si $n = p$ et **homogène** si $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$.

✓ Une **solution** est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ vérifiant toutes les équations de ce système.
Un système est **compatible** s'il possède au moins une solution et incompatible sinon.
Un **système de Cramer** est un système carré qui possède une unique solution.

Définition 29:

✓ Un système à n équations et p inconnues est **échelonné** s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- ⋆ si une ligne a un membre de gauche nul, toutes les lignes suivantes ont aussi un membre de gauche nul,
- ⋆ dans les lignes dont le membre de gauche est non nul, l'indice de l'inconnue portant le premier coefficient non nul à partir de la gauche croˆit strictement.

Un système échelonné est un système de la forme :

$$(\mathscr{E})\ :\ \begin{cases} a_{1,j_1}x_{j_1} + \qquad \dots \qquad + a_{1,p}x_p & = b_1 \\ \qquad a_{2,j_2}x_{j_2} + \qquad \dots \qquad + a_{2,p}x_p & = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots & \ \ \vdots \\ \qquad\qquad a_{r,j_r}x_{j_r} + \quad \dots \quad + a_{r,p}x_p & = b_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = b_{r+1} \\ & \ \ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = b_n \end{cases}$$

où $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ et où les éléments a_{i,j_i} sont tous non nuls.

Définition 30:

Un système <u>carré</u> à n équations et n inconnues est **triangulaire supérieur** si : $\forall i > j,\ \ a_{ij} = 0$

$$(\mathscr{T})\ :\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \quad \vdots & \ \ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{n,n}x_n & = b_n \end{cases}$$

Définition 31: (Opérations Élémentaires)

On note L_i la i-ème ligne du système.

✓ On note L_i la i-ème ligne du système. Les **Opérations Élémentaires sur les Lignes** (OEL) sont :

$$L_i \leftrightarrow L_j \qquad ; \qquad L_i \leftarrow \alpha L_i\ ,\ \alpha \in \mathbf{K}^* \qquad ; \qquad L_i \leftarrow L_i + \beta L_j\ ,\ \beta \in \mathbf{K}\ ,\ i \neq j$$

La première opération permute la ligne L_i et la ligne L_j. La seconde remplace la ligne L_i par un multiple non nul d'elle même. La troisième remplace la ligne L_i par la ligne L_i à laquelle on ajoute éventuellement un multiple quelconque de la ligne L_j. On autorisera également les opérations composées par les précédentes qui sont du type $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j\ ,\ \alpha \in \mathbf{K}^*$.

✓ Deux systèmes $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ sont **équivalents** si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'OEL.
On note alors $(\mathscr{S}_1) \Leftrightarrow (\mathscr{S}_2)$.

Définition 32: (vocabulaire matriciel)

✓ Une **matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K** est une famille d'éléments de **K** indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
On note $M = (m_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,p]\!]}}$ et on représente M sous forme d'un tableau :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

Les $m_{i,j} \in \mathbf{K}$ sont les **coefficients** de la matrice M. On notera $M = (m_{i,j})$ ou $[M]_{i,j} = m_{i,j}$ si il n'y a pas d'ambigu¨ité sur la dimension de la matrice. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients sans **K**.
Lorsque $n = 1$ (resp. $p = 1$) on parle de **matrice ligne** (resp. de **matrice colonne**).
Lorsque $n = p$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices **carrées d'ordre** n.

✓ On note $O_{\mathscr{M}_{n,p}}(\mathbf{K})$ ou $O_{n,p}$ la matrice **nulle** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
Si $n = p$ on note simplement O_n la matrice carrée nulle d'ordre n.
On note I_n la matrice **identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$: c'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des coefficients diagonaux qui valent 1.

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \qquad , \qquad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \qquad (\textbf{symbole de Kronecker})$$

Si $(i_0, j_0) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ la **matrice élémentaire** E_{i_0,j_0} de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est la matrice dont le seul coefficient non nul est le coefficient d'indice (i_0, j_0) qui vaut 1

$$E_{i_0,j_0} = \left(\delta_{i_0,i}\delta_{j_0,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

✓ Une matrice **triangulaire supérieure** est une matrice carrée telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i > j \Rightarrow m_{i,j} = 0)$
Cela revient à dire que tous les termes sous-diagonaux (strictement au dessous de la diagonale) sont nuls.
Une matrice **triangulaire inférieure** est une matrice carrée telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i < j \Rightarrow m_{i,j} = 0)$
Cela revient à dire que tous les termes sur-diagonaux (strictement au dessus de la diagonale) sont nuls.

✓ Une matrice **diagonale** est une matrice carrée telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0)$
Cela revient à dire que tous les termes non diagonaux sont nuls. On note une telle matrice $M = \operatorname{diag}(m_{1,1}, \dots, m_{n,n})$.
Une matrice **scalaire** est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux.

✓ Une matrice **symétrique** est une matrice carrée vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = m_{j,i}$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques est noté $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$.
Une matrice **anti-symétrique** est une matrice carrée vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = -m_{j,i}$.
L'ensemble des matrices carrées d'ordre n anti-symétriques est noté $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.

Définition 33: (opérations matricielles)

✓ Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ alors la matrice $A+B$, **somme de** A **et de** B, est définie par

$$A+B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \qquad ; \qquad \forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\ , \quad [A+B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$$

✓ Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors la matrice λA, **produit de** A **par le scalaire** λ, est définie par

$$\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \qquad ; \qquad \forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\ , \quad [\lambda A]_{i,j} = \lambda \times [A]_{i,j}$$

✓ Si $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbf{K})$ alors la matrice AB, **produit de** A **par** B, est définie par

$$AB \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \qquad ; \qquad \forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ \forall j \in [\![1,p]\!]\ , \quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} [A]_{i,k} \times [B]_{k,j}$$

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ **commutent** si $AB = BA$.

✓ Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ alors la matrice $A^\top$, **transposée de** A, est définie par

$$A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \qquad ; \qquad \forall i \in [\![1,p]\!]\ ,\ \forall j \in [\![1,n]\!]\ , \quad [A^\top]_{i,j} = [A]_{j,i}$$

✓ Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ alors la matrice **puissance** A^p est définie par $A^0 = I_n$ et $A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.

Définition 34: (opérations élémentaires sur les matrices)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On note L_i la i-ième ligne de A et C_j la j-ième colonne de A.

✓ On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de A chacune des opérations suivantes (où $i \neq j$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\beta \in \mathbf{K}^*$)

$$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad (\textbf{transvection}) \quad ; \quad L_i \leftarrow \beta L_i \quad (\textbf{dilatation}) \quad ; \quad L_i \leftrightarrow L_j \qquad (\textbf{permutation})$$

✓ On appelle **opération élémentaire sur les colonnes** de A chacune des opérations suivantes (où $i \neq j$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et $\beta \in \mathbf{K}^*$)

$$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j \quad (\textbf{transvection}) \quad ; \quad C_i \leftarrow \beta C_i \quad (\textbf{dilatation}) \quad ; \quad C_i \leftrightarrow C_j \qquad (\textbf{permutation})$$

Définition 35: (matrices associées aux opérations élémentaires)

✓ Si $\alpha \in \mathbf{K}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ on appelle **matrice de transvection** toute matrice de la forme

$$T_{i,j,\alpha} = I_n + \alpha E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

✓ Si $\beta \in \mathbf{K}^*$ et $i \in [\![1,n]\!]$ on appelle **matrice de dilatation** toute matrice de la forme

$$D_{i,\beta} = I_n + (\beta - 1)E_{i,i} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

✓ Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et on appelle **matrice de permutation** toute matrice de la forme

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} + E_{i,j} - E_{j,j} + E_{j,i} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

Définition 36: (matrice inversible)

Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est **inversible** si il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
La matrice B est alors unique : on dit que B est la **matrice inverse** de A et on note $B = A^{-1}$.
L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $GL_n(\mathbf{K})$ est est appelé le **groupe linéaire**.

Définition 37: (matrices semblables)

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

✓ On dit que A **et** B **sont semblables** si il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

V Algèbre linéaire

Définition 38: (sous-espace vectoriel (sev))

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si

- ⋆ $F \subset E$
- ⋆ $0_E \in F$,
- ⋆ F est stable par addition : $\forall (x,y) \in F^2 \ , \ x+y \in F$,
- ⋆ F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall \lambda \in \mathbf{K} \ , \ \forall x \in F \ , \ \lambda x \in F$

Définition 39: (somme, somme directe et supplémentaire)

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

✓ On appelle **sous-espace vectoriel somme de** F_1 **et** F_2 (que l'on note F_1+F_2) le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F_1+F_2 = \{x_1+x_2 \ ; \ (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

✓ On dit que F_1 **et** F_2 **sont en somme directe** si la décomposition précédente de tout élément de F_1+F_2 est unique :

$$\forall x \in F_1+F_2 \ , \ \exists \ ! \ (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2 \ , \quad x = x_1+x_2$$

Dans ce cas la somme de F_1 et F_2 se notera $F_1 \oplus F_2$.

✓ On dit que F_1 et F_2 sont deux **sous-espaces vectoriels supplémentaires de** E si $E = F_1 \oplus F_2$, autrement dit

$$\forall x \in E \ , \ \exists \ ! \ (x_1,x_2) \in F_1 \times F_2 \ , \quad x = x_1+x_2$$

On dira alors que F_2 **est un supplémentaire de** F_1 **dans** E.

Définition 40: (combinaison linéaire, espace engendré)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de $n \geqslant 1$ vecteurs de E.

✓ On dit que $v \in E$ est une **combinaison linéaire** de la famille $(u_1,\dots,u_n)$ si il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

✓ On appelle **espace engendré** par la famille $(u_1,\dots,u_n)$ l'ensemble

$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \ ; \ (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n \right\}$$

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(u_1,\dots,u_n)$.

Remarque 4: vocabulaire fondamental ♡

- ✓ Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille finie le nombre d'éléments de I est appelé le **cardinal de la famille** (on parle aussi de **taille** ou de **longueur**).
- ✓ Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille on appelle **sous-famille** de $(u_i)_{i\in I}$ une famille $(u_j)_{j\in J}$ avec $J \subset I$.
- ✓ Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille on appelle **sur-famille** de $(u_i)_{i\in I}$ une famille $(u_j)_{j\in J}$ avec $I \subset J$.
- ✓ Si $\mathscr{B}_1 = (u_1,\dots,u_n)$ et $\mathscr{B}_2 = (v_1,\dots,v_p)$ on appelle **concaténation** de ces deux familles la famille $\mathscr{B} = (u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n)$. On notera parfois abusivement $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2)$ ou $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$.

Définition 41: (famille génératrice)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de $n \geqslant 1$ vecteurs de E.

✓ On dit que $(u_1,\dots,u_n)$ est une **famille génératrice de** E (ou qu'elle **engendre** E) si

$$E = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$$

Cela revient à dire que tout élément de E est combinaison linéaire de $(u_1,\dots,u_n)$.

Définition 42: (familles libres et liées)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de $n \geqslant 1$ vecteurs de E.

✓ On dit que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est **libre** (ou que les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont **linéairement indépendants**) si

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n \ , \qquad (\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0_E) \Longrightarrow (\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0_{\mathbf{K}})$$

✓ On dit que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est **liée** si elle n'est pas libre.
Cela revient à dire qu'au moins un des u_k est combinaison linéaire des autres.

Définition 43: (base d'un espace vectoriel)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de $n \geqslant 1$ vecteurs de E.
✓ On dit que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est une **base de** E si c'est une famille génératrice de E et libre, c'est à dire

$$\forall x\in E \ , \ \exists!(\lambda_1\dots,\lambda_n)\in\mathbf{K}^n \ , \ x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_ku_k$$

Définition 44: (coordonnées dans une base)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Tout élément $x\in E$ se décompose de manière unique en

$$x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n$$

Les **coordonnées de** x **dans la base** $(e_1,\dots,e_n)$ sont les scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
On dit que λ_k est la k**-ième coordonnée** de x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Définition 45: (dimension d'un ev)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

✓ On dit que E est de **dimension finie** si E possède une famille génératrice finie.
Dans ce cas on appelle **dimension** de E (notée $\dim_{\mathbf{K}}(E)$ ou $\dim(E)$) le nombre d'éléments d'une base quelconque de E.

✓ On dit que E est de **dimension infinie** si E n'est pas de dimension finie.

Définition 46: (rang d'une famille finie de vecteur)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n)$ une famille finie de $n \geqslant 1$ vecteurs de E.

✓ Le **rang** de $(u_1,\dots,u_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille :

$$\mathrm{rg}(u_1,\dots,u_n)=\dim\left(\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)\right)$$

Définition 47: (matrice d'une famille dans une base)

Soit E un de $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E.

✓ Si $x\in E$ on appelle **matrice de** x **dans la base** $\mathscr{B}$ la matrice colonne de taille n formée par les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.
✓ Si $\mathscr{F}=(u_1,\ldots,u_p)$ est une famille finie de p vecteurs de E, la **matrice de** $\mathscr{F}$ **dans la base** $\mathscr{B}$ est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont la j-ième colonne est la matrice de u_j dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 48: matrice de passage

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

✓ Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E on appelle **matrice de passage de** $\mathscr{B}$ **à** $\mathscr{B}'$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.
On notera cette matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$:

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$$

Remarque 5: reformulation

✓ La matrice de passage $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est donc la matrice où on a mis en colonnes les vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathscr{B}$. On a les relations (attention à l'ordre des bases dans la dernière égalité !) :

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$

Définition 49: (applications linéaires)

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espace vectoriels.

✓ On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $u:E\to F$ telle que

$$\forall(x,y)\in E^2\ ,\ \forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2\ ,\ u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
Un élément de $\mathscr{L}(E,\mathbf{K})$ est appelé une **forme linéaire** sur E.

✓ Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ le **noyau** de u est : $\mathrm{Ker}\ u=\{x\in E\mid u(x)=0_F\}$

✓ Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ l'**image** de u est : $\mathrm{Im}\ u=\{u(x)\ ;\ x\in E\}=\{y\in F\mid\exists\, x\in E\ ,\ u(x)=y\}$

✓ On dit que $u:E\to F$ est un **isomorphisme** si u est linéaire et bijective.
S'il existe un isomorphisme entre E et F alors on dit que E et F sont **isomorphes**.

✓ On dit que $u:E\to F$ est un **endomorphisme de** E si $E=F$ et que u est linéaire.
L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

✓ On dit que $u:E\to E$ est un **automorphisme** si u est un endomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$ et est appelé le **groupe linéaire** de E.

Définition 50: (rang d'une application linéaire)

Soit E et F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et $u\in\mathscr{L}(E,F)$.

✓ On dit que u est de **rang fini** si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie. Dans ce cas on appelle **rang de** u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$:

$$\mathrm{rg}(u)=\dim(\mathrm{Im}\ u)$$

Définition 51: (projecteurs et symétrie)

Soit E un **K**-espace vectoriel.

✓ On dit que $p \in \mathscr{L}(E)$ est un **projecteur** s'il existe F_1, F_2 deux supplémentaires de E tel que

$$\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \ , \qquad p(x_1 + x_2) = x_1$$

On dit alors que p est la **projection (ou le projecteur) sur** F_1 **parallèlement à** F_2.

✓ On dit que $s \in \mathscr{L}(E)$ est une **une symétrie** s'il existe F_1, F_2 deux supplémentaires de E tel que

$$\forall (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \ , \qquad s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$$

On dit alors que s est la **symétrie par rapport à** F_1 **parallèlement à** F_2.

Définition 52: (hyperplan)

✓ On appelle **hyperplan** d'un **K**-ev E le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.

Définition 53: (matrice d'une application linéaire dans des bases prescrites)

Soit E et F deux **K**-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F.

✓ Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on appelle **matrice de** u **dans les bases** $\mathscr{B}_E$ **et** $\mathscr{B}_F$ (ou **relativement aux bases** $\mathscr{B}_E$ **et** $\mathscr{B}_F$) la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_n)$ dans cet ordre dans la base $\mathscr{B}_F$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u)$ et on a

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \ , \ u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i \qquad ; \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,j} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_E = \mathscr{B}_F$ on notera $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Définition 54: (application linéaire ou matrice canoniquement associée)

Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. On note $\mathscr{C}_n$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et $\mathscr{C}_p$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$

✓ On appelle **application linéaire canoniquement associée à** M l'unique élément $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^p)$ tel que

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_n, \mathscr{C}_p}(u)$$

✓ On appelle **noyau de** M (noté $\mathrm{Ker}(M)$) le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à M.

✓ On appelle **image de** M (noté $\mathrm{Im}(M)$) l'image de l'application linéaire canoniquement associée à M.

✓ On appelle **rang de** M (noté $\mathrm{rg}(M)$) le rang de l'application linéaire canoniquement associée à M.

VI Analyse des fonctions réelles

Définition 55: (limite en $x_0 \in \mathbf{R}$ d'une fonction à valeurs réelles)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application définie au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$.

✓ On dit que f **admet** $\ell \in \mathbf{R}$ **comme limite en** x_0 si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

✓ On dit que f **admet** $+\infty$ **comme limite en** x_0 si : $\forall M > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \geqslant M)$

✓ On dit que f **admet** $-\infty$ **comme limite en** x_0 si : $\forall M < 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \implies f(x) \leqslant M)$

Définition 56: (limite en $+\infty$ d'une fonction à valeurs réelles)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application définie au voisinage de $+\infty$.

✓ On dit que f **admet** $\ell \in \mathbf{R}$ **comme limite en** $+\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

✓ On dit que f **admet** $+\infty$ **comme limite en** $+\infty$ si : $\forall M > 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \geqslant A \implies f(x) \geqslant M)$

✓ On dit que f **admet** $-\infty$ **comme limite en** $+\infty$ si : $\forall M < 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \geqslant A \implies f(x) \leqslant M)$

Définition 57: (limite en $-\infty$ d'une fonction à valeurs réelles)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application définie au voisinage de $-\infty$.

✓ On dit que f **admet** $\ell \in \mathbf{R}$ **comme limite en** $-\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \leqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

✓ On dit que f **admet** $+\infty$ **comme limite en** $-\infty$ si : $\forall M > 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \leqslant A \implies f(x) \geqslant M)$

✓ On dit que f **admet** $-\infty$ **comme limite en** $-\infty$ si : $\forall M < 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \leqslant A \implies f(x) \leqslant M)$

Définition 58: (limite à droite et à gauche en $x_0 \in \mathbf{R}$)

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$.

✓ On suppose que l'application $f_{|I\cap]x_0,+\infty[}$ est définie au voisinage de x_0.
On dit que f **admet** a **comme limite à droite en** x_0 si $f_{|I\cap]x_0,+\infty[}$ possède une limite en x_0 égale à a.

✓ On suppose que l'application $f_{|I\cap]-\infty,x_0[}$ est définie au voisinage de x_0.
On dit que f **admet** a **comme limite à gauche en** x_0 si $f_{|I\cap]-\infty,x_0[}$ possède une limite en x_0 égale à a.

Définition 59: (limite finie d'une fonction à valeurs complexes)

Soit $f : I \to \mathbf{C}$ définie au voisinage de a, et $\ell \in \mathbf{C}$.

✓ On dit que f **admet** ℓ **comme limite en** $a = x_0 \in \mathbf{R}$ si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

✓ On dit que f **admet** ℓ **comme limite en** $a = +\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \geqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

✓ On dit que f **admet** $\ell \in \mathbf{R}$ **comme limite en** $a = -\infty$ si : $\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ A \in \mathbf{R}\ ,\ \forall x \in I\ ,\ (x \leqslant A \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)$

Remarque 6: une formulation topologique qui unifie toutes ces définitions

- ✓ La notion de limite est une notion locale : si V est un voisinage de a, déterminer la limite de f en a équivaut à déterminer la limite de $f_{|V\cap I}$ en a. On peut donc se restreindre à $I \cap V$ pour étudier cette limite.
- ✓ Pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap D) \subset V$.

Définition 60: (asymptotes)

Soit $f : D \to \mathbf{R}$ une application définie au voisinage de $x_0 \in \mathbf{R}$ et de $+\infty$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}$.

✓ On dit que $\mathscr{C}_f$ possède une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

✓ On dit que $\mathscr{C}_f$ possède une **asymptote horizontale en** $+\infty$ d'équation $y = a$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

✓ On dit que $\mathscr{C}_f$ possède une **asymptote oblique en** $+\infty$ d'équation $y = ax + b$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

Définition 61: (relations de comparaison)

Soit $f : D \to \mathbf{K}$ et $g : D \to \mathbf{K}$ deux fonctions définies au voisinage de a.

✓ On dit que f **est équivalente à** g **au voisinage de** a si il existe $u : D \to \mathbf{K}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) = u(x)g(x) \underline{\text{ au voisinage de } a} \\ u(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1 \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

✓ On dit que f **est négligeable devant** g **au voisinage de** a si il existe $\varepsilon : D \to \mathbf{K}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) = \varepsilon(x)g(x) \underline{\text{ au voisinage de } a} \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ ou $f = \mathrm{o}_a(g)$ ou $f(x) = \mathrm{o}_a(g(x))$.

✓ On dit que f **est dominée par** g **au voisinage de** a si il existe $u : D \to \mathbf{K}$ tel que

$$\begin{cases} f(x) = u(x)g(x) \underline{\text{ au voisinage de } a} \\ u \text{ bornée } \underline{\text{ au voisinage de } a} \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{=} \mathscr{O}(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathscr{O}(g(x))$ ou $f = \mathscr{O}_a(g)$ ou $f(x) = \mathscr{O}_a(g(x))$.

Définition 62: (continuité en un point)

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une application avec $x_0 \in I$.

✓ On dit que f est **continue en** x_0 si f admet une limite finie en x_0 égale à $f(x_0)$.
On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point $x_0 \in I$.
L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathscr{C}(I, \mathbf{K})$ ou $\mathscr{C}^0(I, \mathbf{K})$.

✓ On suppose que $f_{|I \cap]x_0, +\infty[}$ est définie au voisinage de x_0.
On dit que f est **continue à droite en** x_0 si f admet une limite à droite en x_0 égale à $f(x_0)$.

✓ On suppose que $f_{|I \cap]-\infty, x_0[}$ est définie au voisinage de x_0.
On dit que f est **continue à gauche en** x_0 si f admet une limite à gauche en x_0 égale à $f(x_0)$.

Définition 63: (dérivabilité en un point $x_0 \in \mathbf{R}$)

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ une application et $x_0 \in I$.

✓ On dit que f est **dérivable en** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbf{K}$.
Le nombre ℓ, noté $f'(x_0)$, est alors appelé le **nombre dérivé de** f **en** x_0.
On dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.
L'application ainsi définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de f sur I. On la note aussi $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

✓ On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbf{K}$.
Ce la revient à dire que $f_{I \cap [x_0, +\infty[}$ est dérivable en x_0.
Le nombre réel l, noté $f'_d(x_0)$, est alors appelé le **nombre dérivé à droite de** f **en** x_0.

✓ On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbf{K}$.
Ce la revient à dire que $f_{I \cap]-\infty, x_0]}$ est dérivable en x_0.
Le nombre réel l, noté $f'_g(x_0)$, est alors appelé le **nombre dérivé à gauche de** f **en** x_0.

Définition 64: (primitive sur un intervalle)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$.
On dit que l'application $F : I \to \mathbf{R}$ est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Définition 65: (extremum local et point critique)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application dérivable et $x_0 \in I$.

✓ On dit f admet un **maximum local en** x_0 si il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]x_0 - r, x_0 + r[\ , \quad f(x) \leqslant f(x_0)$
✓ On dit f admet un **minimum local en** x_0 si il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in I \cap]x_0 - r, x_0 + r[\ , \quad f(x) \geqslant f(x_0)$

✓ On dit f admet un **extremum local en** x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0.

✓ On dit que x_0 est un **point critique** de f si $f'(x_0) = 0$.

Définition 66: (tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application dérivable en $x_0 \in I$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

✓ On appelle **tangente à** $\mathscr{C}_f$ **au point** $M(x_0, f(x_0))$ la droite d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition 67: (développement limité)

Soit $a \in \mathbf{R}$ et $f : D \to \mathbf{K}$ une application définie au voisinage de a.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On dit que f possède un **développement limité d'ordre** n **au voisinage de** a (on note $DL_n(a)$) si on peut trouver $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n + \mathrm{o}((x - a)^n)$$

De manière équivalente il existe $\varepsilon : D \to \mathbf{K}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in D\ , \qquad f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \cdots + a_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Définition 68: (fonction convexe)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$.

✓ On dit que f est **convexe** sur I si

$$\forall (x,y) \in I^2 \ , \ \forall \lambda \in [0,1] \ , \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

✓ On dit que f est **concave** sur I si $(-f)$ est convexe. Autrement dit :

$$\forall (x,y) \in I^2 \ , \ \forall \lambda \in [0,1] \ , \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition 69: (fonction k-lipschitzienne)

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et K un réel positif.

✓ On dit que f est K**-lipschitzienne** si : $\quad \forall (x,y) \in I^2 \ , \ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$

✓ On dit que f est **lipschitzienne** si il existe un réel positif K tel que f soit K-lipschitzienne.

Définition 70: (somme de Riemann)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

✓ On appelle la n**-ième somme de Riemann** sur $[a,b]$ de l'application $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ le réel :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Remarque 7:

✓ Le nombre $S_n(f)$ représente l'aire d'une famille de n rectangles qui "encadrent" l'aire située sous la courbe de f.
✓ On appelle parfois $S_n(f)$ la "somme de Riemann à gauche", et la "somme de Riemann à droite" est alors

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

VII Polynômes et fonctions rationnelles

Définition 71: (vocabulaire)

✓ On appelle **polynôme à une indéterminée** à coefficients dans $\mathbf{K}$ toute suite $P = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ nulle à partir d'un certain rang.

$$P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$$

Les éléments de la suite sont appelés les **coefficients** du polynôme.
On note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$.

✓ La suite nulle $0_{\mathbf{K}[X]} = (0)_{k\in\mathbf{N}}$ est appelé le **polynôme nul**.
Une suite dont tous les termes de rang supérieur ou égal à 1 sont nuls est appelée **polynôme constant**.

$$0_{\mathbf{K}[X]} = (0,0,\dots) \qquad ; \qquad 1_{\mathbf{K}[X]} = (1,0,\dots)$$

✓ Si $P = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est un polynôme non nul on appelle **degré de** P le plus grand entier naturel d tel que $a_d \neq 0$.

$$\forall P \in \mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\}\ , \quad \deg(P) = \max\{k \in \mathbf{N} \mid a_k \neq 0\}$$

Par convention le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Si $P \neq 0$ est de degré $d \in \mathbf{N}$ le coefficient $a_d \neq 0$ est appelé le **coefficient dominant** de P.
On dit que P est **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

✓ Soit $n \in \mathbf{N}$.
On note $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

Remarque 8: notations usuelles

- ✓ En notant $X^k = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (seule la $(k+1)$-ième composante est non nulle et vaut 1) avec la convention $X^0 = 1$un polynôme $P = (a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de degré d s'écrit alors (la première somme n'est en fait pas infinie) :

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

- ✓ L'écriture $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ signifie que $\deg(P) \leqslant n$, et que $\deg(P) = n$ si et seulement si $a_n \neq 0$.

Définition 72: (opérations sur les polynômes)

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ et λ un scalaire.

✓ On appelle **polynôme somme de** P **et** Q le polynôme $P+Q$ défini par

$$P+Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k$$

✓ On appelle **polynôme produit de** P **par le scalaire** λ le polynôme λP défini par

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) X^k$$

✓ On appelle **polynôme produit de** P **et** Q le polynôme $PQ = P \times Q$ défini par

$$PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k\ ,\ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

✓ On appelle **polynôme composé de** P **et** Q le polynôme

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k$$

Définition 73: (polynôme dérivé)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbf{K}[X]$.

✓ On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme P' défini par

$$P' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k X^{k-1}$$

✓ On définit les **dérivées successives** de P par récurrence avec les relations :

$$P^{(0)} = P \quad ; \quad \forall r \in \mathbf{N}\ ,\ P^{(r+1)} = \left(P^{(r)}\right)'$$

Le polynôme $P^{(r)}$ est appelé le **polynôme dérivé d'ordre** r de P.

Remarque 9: une décomposition utile pour $P \in \mathbf{C}[X]$

- ✓ Si $P \in \mathbf{C}[X]$ il existe un unique couple $(P_1, P_2) \in (\mathbf{R}[X])^2$ tel que $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ (obtenu en écrivant les coefficients de P sous forme algébrique). On dit parfois que $P_1 = \mathrm{Re}(P)$ et $P_2 = \mathrm{Im}(P)$.
- ✓ Si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{C}[X]$ on appelle **polynôme conjugué de** P le polynôme $\overline{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$.
  Si $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ avec $(P_1, P_2) \in (\mathbf{R}[X])^2$ on a alors $\overline{P} = P_1 - \mathrm{i}P_2$.

Définition 74: (fonctions polynomiales)

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un élément de $\mathbf{K}[X]$.

✓ On appelle **fonction polynomiale associée au polynôme** P la fonction $\tilde{P} : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{K}\ ,\ \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

✓ Si $D \subset \mathbf{K}$ on dit qu'une application $f : D \to \mathbf{K}$ est **polynomiale** s'il existe $P \in \mathbf{K}[X]$ tel que $f(x) = \tilde{P}(x)$ pour tout $x \in D$.

Définition 75: (divisibilité)

Soit P et Q deux éléments de $\mathbf{K}[X]$.

✓ On dit que Q **divise** P si il existe $R \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = QR$.
On note alors $Q \mid P$ et on dit aussi que P est un **multiple** de Q ou que Q est un **diviseur** de P.

Définition 76: (division euclidienne)

Soit A et B deux éléments de $\mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbf{K}[X])^2$ tel que

$$\begin{cases} A = QB + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On appelle Q le **quotient** de la **division euclidienne** de A par B, et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Définition 77: (racine d'un polynôme)

✓ On dit que $\alpha \in \mathbf{K}$ est une **racine** de $P \in \mathbf{K}[X]$ si $P(\alpha) = 0$.
✓ Si $P \in \mathbf{K}[X]$ est <u>non nul</u> et que $\alpha \in \mathbf{K}$ est une racine de P on appelle **ordre de multiplicité** de α pour P le plus grand entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P. On dit alors que α est **racine d'ordre** m de P.

Définition 78: (polynôme scindé)

✓ On dit que $P \in \mathbf{K}[X]$ est **scindé sur K** s'il existe un entier naturel n, un scalaire non nul $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de **K** tels que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)$$

Définition 79: (polynôme irréductible)

✓ On dit que $P \in \mathbf{K}[X]$ est **irréductible dans K**$[X]$ si il est <u>non constant</u> et que :

$$\forall (Q,R) \in (\mathbf{K}[X])^2 \ , \qquad P = QR \implies \big(\deg(Q) = 0 \ \text{OU} \ \deg(R) = 0\big)$$

Définition 80: (fonctions rationnelles)

Soit $D \subset \mathbf{K}$ une partie <u>infinie</u> et $f : D \to \mathbf{K}$ une application.

✓ On dit que f est une **fonction rationnelle** s'il existe $(P,Q) \in (\mathbf{K}[X])^2$ tel que

$$\forall x \in D \ , \qquad \begin{cases} Q(x) \neq 0 \\ f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{cases}$$

✓ On dit que f est à **pôles simples** si f est une fonction rationnelle avec Q scindé à racines simples.

VIII Équations différentielles

Définition 81: (équation différentielle linéaire)

✓ On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 **(resp. d'ordre** 2**)** sur D une équation du type

$$(\mathscr{E})\ :\ y'(t)+a(t)y(t)=c(t) \qquad \text{resp.} \qquad (\mathscr{E})\ :\ y''(t)+a(t)y'(t)+b(t)y(t)=c(t)$$

où $y : D \to \mathbf{K}$ est une application une fois (resp. deux fois) dérivable sur D inconnue et où $a : D \to \mathbf{K}$ et $b : D \to \mathbf{K}$ et $c : D \to \mathbf{K}$ sont des applications continues sur D connues. La fonction c s'appelle le **second membre** de l'équation.

✓ **Résoudre** $(\mathscr{E})$ **sur** D consiste à déterminer toutes les applications $y : D \to \mathbf{K}$ une fois (resp. deux fois) dérivable sur D vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$.

✓ On parle d'**équation homogène** $(\mathscr{E}_H)$ lorsque le second membre est nul (*i.e.* c est l'application constante égale à 0).

IX Espaces pré-hilbertiens

Définition 82: (produit scalaire)

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $B : E \times E \to \mathbf{R}$ une application.

✓ On dit B est un **produit scalaire** sur E si B est une application bilinéaire symétrique définie positive.
Autrement dit : les applications $x \mapsto B(x,y)$ et $y \mapsto B(x,y)$ sont linéaires et on a de plus

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \ B(x,y) = B(y,x) \quad \textbf{(symétrique)} \quad ; \quad \forall x \in E \ , \ \begin{cases} B(x,x) \geqslant 0 \\ B(x,x) = 0 \implies x = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(définie positive)}$$

✓ On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

✓ On appelle **espace euclidien** un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Définition 83: (produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$)

✓ On appelle **produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$** le produit scalaire défini par

$$\forall (x,y) \in (\mathbf{R}^n)^2 \ , \qquad \langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Remarque 10: (reformulation matricielle)

✓ On identifiera parfois canoniquement $\mathbf{R}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ pour noter ce produit scalaire

$$\forall (X,Y) \in (\mathbf{R}^n)^2 \ , \qquad \langle X \mid Y \rangle = X^{\top} Y = Y^{\top} X$$

✓ On rappelle que l'identification canonique de $\mathbf{R}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ se fait via l'isomorphisme qui associe au vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ la matrice X de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Définition 84: (distance et norme associées à un produit scalaire)

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \ , \ \rangle$.

✓ On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ l'application $\| \ . \ \| : E \to \mathbf{R}_+$ définie par

$$\forall x \in E \ , \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

✓ On appelle **distance euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$ l'application $d : E^2 \to \mathbf{R}_+$ définie par

$$\forall (x,y) \in E^2 \ , \qquad d(x,y) = \|x - y\|$$

Définition 85: (orthogonalité de vecteurs)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire et $\|\ .\ \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

✓ On dit que $x \in E$ et $y \in E$ sont **orthogonaux** si $\langle x, y\rangle = 0$. On note $x \perp y$.

✓ On dit que $\mathscr{F}$ est une **famille orthogonale** de E si les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall i \neq j\ , \quad \langle u_i, u_j\rangle = 0$$

✓ On dit que $\mathscr{F}$ est une **famille orthonormée** de E si $\mathscr{F}$ est une famille orthogonale formmée de vecteurs unitaires :

$$\forall i \neq j\ , \quad \langle u_i, u_j\rangle = 0 \qquad ; \qquad \forall i \in I\ ,\ \|u_i\| = 1$$

✓ On dit que $\mathscr{F}$ est une **base orthogonale de** E si $\mathscr{F}$ est une base de E qui est également une famille orthogonale.

✓ On dit que $\mathscr{F}$ est une **base orthonormée de** E si $\mathscr{F}$ est une base de E qui est également une famille orthonormée.

Définition 86: (orthogonalité d'une partie, espaces orthogonaux)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire et $\|\ .\ \|$ sa norme euclidienne associée.

✓ Si $A \subset E$ est une partie de E on appelle **orthogonal de** A l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout élément de A. On note $A^\perp$ cet ensemble.

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A\ ,\ \langle x, a\rangle = 0\}$$

✓ On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont des **sous-espaces orthogonaux** si $G \subset F^\perp$.

$$\forall x \in G\ ,\ \forall y \in F\ ,\ \langle x, y\rangle = 0$$

Remarque 11:

- ✓ On a toujours $E^\perp = \{0_E\}$ car si $x \in E^\perp$ alors x est orthogonal à lui-même.
- ✓ Si $A = F$ un sev de E on obtient que les sev F et $F^\perp$ sont orthogonaux.
- ✓ L'orthogonalité de F et G équivaut également à $F \subset G^\perp$ (on a donc toujours équivalence entre $F \subset G^\perp$ et $G \subset F^\perp$).
- ✓ On peut démontrer (exercice !, cf. exemple 10) que si $E = F \oplus G$ et que $G \subset F^\perp$ alors $G = F^\perp$. Cela sera pratique pour établir qu'une projection est une projection orthogonale.
- ✓ Si F est un sev de E et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F on a (par bilinéarité pour $\Leftarrow$) :

$$x \in F^\perp \iff (\forall y \in F\ ,\ \langle x, y\rangle = 0) \iff (\forall i \in [\![1, p]\!]\ ,\ \langle x, e_i\rangle = 0)$$

Définition 87: (projection orthogonale)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire et $\|\ .\ \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

✓ On appelle **projection orthogonale sur** F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
On note cette projection p_F (ou π_F). Si $x \in E$ le vecteur $p_F(x)$ est appelé le **projeté orthogonal** de x sur F.

✓ On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 12: méthode

- ✓ Un projecteur $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$.
  Si E est de dimension finie cela équivaut à $\mathrm{Ker}(u) \subset (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$ (raisonner sur les dimensions), et équivaut également à $\mathrm{Im}(u) \subset (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$ (par définition de l'orthogonalité).
- ✓ On peut utiliser une famille génératrice $(u_1, \dots, u_p)$ de F et déterminer $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ tel que
  $$\forall i \in [\![1, p]\!] , \qquad \langle x - p_F(x), u_i \rangle = 0$$
  ce qui donne un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
- ✓ On peut construire de manière effective une base orthonormée de F par le procédé de Gram-Schmidt. Si on a cette base $(u_1, \dots, u_p)$ alors on a immédiatement
  $$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i$$
- ✓ Une symétrie $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) = (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}))^{\perp}$.
  Si E est de dimension finie cela équivaut à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) \subset (\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}))^{\perp}$ (raisonner sur les dimensions), et équivaut également à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \subset (\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}))^{\perp}$ (par définition de l'orthogonalité).

Définition 88: (distance à une partie)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle\ ,\ \rangle$ son produit scalaire et $\|\ .\ \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit A une partie non vide de E.

✓ Si $x \in E$ on appelle **distance de** x **à** A le réel
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

X Déterminants

Définition 89: (formes multilinéaires)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f : E^p \to \mathbf{K}$.

✓ On dit que f est une **forme p-linéaire** sur E si elle est linéaire en chacune de des variables, c'est à dire si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $(a_1, \dots, a_p) \in E^p$, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{ccl} E & \to & \mathbf{K} \\ u & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, u, a_{i+1} \dots, a_p) \end{array}$$

On note $\mathscr{L}_p(E, \mathbf{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.
✓ Une forme p-linéaire f est **alternée** si pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ avec $i \neq j$ on a :

$$u_i = u_j \Longrightarrow f(u_1, u_2, \dots, u_p) = 0$$

On note $\mathscr{A}_p(E, \mathbf{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E.
• Une forme p-linéaire f est **antisymétrique** si pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ avec $i < j$ on a :

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

Définition 90: (application déterminant)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E.

✓ On appelle **déterminant en base** $\mathscr{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée $f : E^n \to \mathbf{K}$ vérifiant $f(\mathscr{B}) = 1$.
On note cette application $f = \det_{\mathscr{B}}$.

Définition 91: (déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.

✓ Si $f \in \mathscr{L}(E)$ on appelle **déterminant de** f l'unique scalaire λ donné par le théorème précédent.
On note ce scalaire $\lambda = \det(f)$.

Remarque 13: calcul pratique du déterminant d'un endomorphisme

✓ Cette définition n'est **JAMAIS** utilisée pour calculer le déterminant d'une endomorphisme.
Comme $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$ on constatera plutôt que pour toute base $\mathscr{B}$ de E on a : $\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$

Définition 92: (déterminant d'une matrice)

✓ On appelle **déterminant de** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et on note $\det(A)$ le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$. Si $A = [C_1 \mid C_2 \mid \cdots \mid C_n]$ est décrite en colonnes et que $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$ on a donc

$$\det(A) = \det_{\mathscr{C}}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ se note $\det(A) = \left|a_{i,j}\right|_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ ou encore :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Définition 93: (déterminant mineur)

✓ Pour $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$ on appelle **mineur d'indice** (i, j) **de** $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans M la ligne i et la colonne j.
On note $\Delta_{i,j}$ ce déterminant.

XI Probabilités

Définition 94: (vocabulaire)

✓ L'**univers** Ω associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats de cette expérience aléatoire.

✓ Une **éventualité** ω est un élément de Ω (on a donc $\omega \in \Omega$).

✓ Un **événement** est une partie A de Ω (on a donc $A \subset \Omega$ i.e. $A \in \mathscr{P}(\Omega)$).
Un **événement élémentaire** est un événement contenant un unique élément (du type $A = \{\omega\}$), l'**événement certain** est $A = \Omega$, et l'**événement vide** (ou **événement impossible**) est $A = \varnothing$.

✓ Deux événements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) si $A \cap B = \varnothing$.

✓ Si $I \subset \mathbf{N}$ est finie, une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** si c'est un recouvrement disjoint de Ω, c'est à dire si les A_i sont deux à deux disjoints et si leur réunion est Ω tout entier

$$\forall i \neq j\ , \quad A_i \cap A_j = \varnothing \qquad ; \qquad \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

Définition 95: (probabilité et distribution de probabilité)

Soit Ω un ensemble fini.

✓ Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :
- ⋆ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- ⋆ Si A et B sont disjoints alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

✓ Une **distribution de probabilité sur** Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ vérifiant :
- ⋆ Pour tout $\omega \in \Omega$ on a $p_\omega \geqslant 0$,
- ⋆ $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.

Définition 96: (conditionnement)

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'événements.

✓ Si $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$ la **probabilité conditionnelle de** A_2 **sachant** A_1 est : $\quad \mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \dfrac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)}$

✓ Les événements A_1 et A_2 sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$. On note $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$.

✓ Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si, pour toute partie finie non vide $J \subset [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Définition 97: (variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini et E un ensemble.

✓ Une **variable aléatoire** X sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans E est une application $X : \Omega \to E$.
L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé l'**image** (ou l'**univers image**) de X. C'est une partie de E.
Si $E = \mathbf{R}$ on parle de **variable aléatoire réelle**, et si $E = \mathbf{C}$ on parle de **variable aléatoire complexe**.

✓ On appelle **variable aléatoire certaine** (ou **constante**) une application $X : \Omega \to E$ constante sur Ω (c'est à dire : il existe $x \in E$ tel que $X(\omega) = x$ pour tout $\omega \in \Omega$).

✓ Si $A \subset \Omega$ on appelle **variable aléatoire indicatrice de** A l'application $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega \ , \qquad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

✓ La **loi de probabilité** de la variable aléatoire réelle X est l'application $\mathbb{P}_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0,1]$ définie par

$$\forall A \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \ , \qquad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

✓ On dit que deux variables aléatoires $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E$ **suivent la même loi** si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. On note $X \sim Y$.

✓ Si A est un événement avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ on appelle **loi conditionnelle de** X **sachant** A la loi de la variable aléatoire induite par X sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}_A)$.

Définition 98: (indépendance de variables aléatoires)

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans des ensembles $E_1, \dots E_n$.

✓ On dit que X_1 et X_2 sont **indépendantes** si pour tout $(A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E_1) \times \mathscr{P}(E_2)$ les événements $(X_1 \in A_1)$ et $(X_2 \in A_2)$ sont indépendants. On note alors $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

$$\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E_1) \times \mathscr{P}(E_2) \ , \qquad \mathbb{P}\left((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2)\right) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \mathbb{P}(X_2 \in A_2)$$

✓ On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(E_1) \times \cdots \times \mathscr{P}(E_n) \ , \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Définition 99: (n uplets de variables aléatoires et lois associées)

Soit $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans des ensembles $E_1, \dots, E_n$.

✓ On appelle **n-uplet de variables aléatoires** associé aux variables $X_1, \dots, X_n$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ la variable aléatoire notée $(X_1, \dots, X_n)$ définie par

$$(X_1, \dots, X_n) \ : \ \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E_1 \times \cdots \times E_n \\ \omega & \longmapsto & (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array} \right.$$

On a $(X_1, \dots, X_n)(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \subset E_1 \times \cdots \times E_n$.

✓ On appelle **loi conjointe** de $X_1, \dots, X_n$ la loi du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$) en tant que variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans $E_1 \times \cdots \times E_n$.

✓ Les **lois marginales** du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ sont les différentes lois de probabilité des variables $X_1, \dots, X_n$.

Remarque 14: le cas $n = 2$

- ✓ Si $X : \Omega \to E_1$ et $Y : \Omega \to E_2$ sont deux variables aléatoires le **couple de variables aléatoires** (X,Y) est donc la variable aléatoire à valeurs dans $E_1 \times E_2$ définie par

$$(X,Y)\ :\ \left|\begin{array}{lcc}\Omega & \to & E_1\times E_2\\ \omega & \longmapsto & (X(\omega),Y(\omega))\end{array}\right.$$

- ✓ On a $(X,Y)(\Omega) \subset X(\Omega)\times Y(\Omega) \subset E\times F$. En général, l'image de (X,Y) n'est qu'une partie de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.
- ✓ Pour alléger les notations, on s'autorise parfois à écrire $\mathbb{P}(X = x\ ,\ Y = y)$ au lieu de $\mathbb{P}((X = x)\cap(Y = y))$.
  ✓ La loi conjointe de X et Y est alors l'application

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}\ :\ \left|\begin{array}{ccc}\mathscr{P}((X,Y)(\Omega)) & \to & [0,1]\\ A & \mapsto & \mathbb{P}((X,Y)\in A)\end{array}\right.$$

- ✓ En pratique, déterminer la loi conjointe reviendra à donner la liste de toutes les valeurs $\mathbb{P}((X = x)\cap(Y = y))$ pour $x\in X(\Omega)$ et $y\in Y(\Omega)$ car il s'agit d'un système complet d'événement (cf. ci-dessous).
- ✓ Les lois marginales du couple (X,Y) sont les lois de probabilité de X et de Y.

Définition 100: (espérance, variance, écart-type)

Soit X une variable aléatoire complexe sur l'espace probabilisé fini $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$ d'image $X(\Omega)$.

✓ L'**espérance** de X est le nombre complexe : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\times\mathbb{P}(X = x)$

✓ Si $X(\Omega)\subset\mathbf{R}$ la **variance** de X est : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \sum_{x\in X(\Omega)}(x-\mathbb{E}(X))^2\times\mathbb{P}(X = x)$

✓ Si $X(\Omega)\subset\mathbf{R}$ l'**écart-type** de X est : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarque 15: variable centrée et centrée réduite

- ✓ On dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$ et **réduite** si $\mathbb{V}(X) = 1$.
- ✓ La variable $Y = X-\mathbb{E}(X)$ est la **variable centrée associée à** X.
- ✓ Si $\sigma(X)\neq 0$ la variable $Z = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la **variable centrée-réduite associée à** X.

Définition 101: (covariance)

Soit X et Y des variables aléatoire réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),\mathbb{P})$.

✓ La **covariance** de X et Y est le nombre réel défini par :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))\times(Y-\mathbb{E}(Y))]$$

✓ On dit que X et Y sont **décorrélées** (non **non-corrélées**) si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Définition 102: Loi uniforme sur E fini $X\sim\mathscr{U}(E)$

Soit E un ensemble fini non vide. On dit que X suit la loi $\mathscr{U}(E)$ si

$$X(\Omega) = E \qquad ; \qquad \forall x\in E\ ,\ \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{card}(E)}$$

Définition 103: Loi de Bernoulli de paramètre p $X \sim \mathscr{B}(p)$

Soit $p \in [0,1]$. On dit que X suit la loi $\mathscr{B}(p)$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \qquad ; \qquad \begin{cases} \mathbb{P}(X=0) = 1-p \\ \mathbb{P}(X=1) = p \end{cases}$$

Si on note $q = 1-p$ on a $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Définition 104: Loi binomiale de paramètres n, p $X \sim \mathscr{B}(n,p)$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ si (en notant $q = 1-p$)

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad ; \qquad \forall k \in [\![0,n]\!]\ ,\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On a $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Remarque 16: prototypes

- ✓ On obtient pour X une loi binomiale on compte le <u>nombre de succés</u> dans une répétition de <u>n expériences de Bernoulli</u> <u>indépendantes</u> et de <u>même paramètre p</u> (préciser le succés en question).
- ✓ On peut dire aussi que X une somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p (préciser le succés).