

Contents

I	Notions fondamentales	2
II	Nombres réels et complexes	3
III	Suites et séries numériques	5
IV	Systèmes linéaires et matrices	8
V	Algèbre linéaire	10
VI	Analyse des fonctions réelles	14
VII	Polynômes et fonctions rationnelles	21
VIII	Équations différentielles	24
IX	Espaces pré-hilbertiens	25
X	Déterminants	27
XI	Probabilités	28

I Notions fondamentales

Propriété 1: (opérations sur les ensembles)

Soit E un ensemble.

(1)(**lois de De Morgan**) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E avec $I \neq \emptyset$ on a

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad ; \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

(2)(**distributivité**) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E avec $I \neq \emptyset$ on a

$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad ; \quad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$$

Propriété 2: (manipulations de sommes et de produits)

(1) (**Changements d'indice**)

Les changements d'indices autorisés sont uniquement ceux du type $k' = \pm k \pm p$ avec $p \in \mathbf{N}$.

(2) (**Téléscopages**) Si $I = \llbracket m, n+1 \rrbracket$ avec $m < n$ (et $a_i \neq 0$ pour tout $i \in I$ pour la formule du produit) on a :

$$\sum_{i=m}^n (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m \quad ; \quad \prod_{i=m}^n \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

(3) (**Sommes triangulaires**)

$$\sum_{m \leq i \leq j \leq n} c_{i,j} = \sum_{i=m}^n \sum_{j=i}^n c_{i,j} = \sum_{j=m}^n \sum_{i=m}^j c_{i,j} \quad ; \quad \sum_{m \leq i < j \leq n} c_{i,j} = \sum_{i=m}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{i,j} = \sum_{j=m+1}^n \sum_{i=m}^{j-1} c_{i,j}$$

Propriété 3: (dénombrements classiques)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(1) Le nombre de p -listes de E est: n^p

C'est également le nombre d'applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(2) Le nombre de p -listes sans répétition de E est: $\frac{n!}{(n-p)!}$,

C'est également le nombre d'applications injectives de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(3) Le nombre de permutations de E est: $n!$

C'est également le nombre d'applications bijjectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(4) Le nombre de p -combinaisons de E est: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$.

C'est également le nombre de parties à p éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Propriété 4: (applications entre ensembles finis)

(1)(**principe des tiroirs**) Si $n > p$ alors une fonction $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ n'est jamais injective.

(2)(**même cardinal**) Soit $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

II Nombres réels et complexes

Propriété 5: (fondamentale)

- (1) Toute partie de \mathbf{Z} non vide et minorée (resp. majorée) possède un minimum (resp. un maximum).
 (2) Toute partie de \mathbf{R} non vide et majorée (resp. minorée) possède une borne supérieure (resp. inférieure).

Propriété 6: (caractérisations des max, sup, min et inf)

Soit A une partie de \mathbf{R} et $(M, m) \in \mathbf{R}^2$.

$$M = \max A \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ M \in A \end{cases} \quad ; \quad M = \sup(A) \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \exists (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad (a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M \end{cases}$$

$$m = \min A \iff \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ m \in A \end{cases} \quad ; \quad m = \inf(A) \iff \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \exists (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad (a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} m \end{cases}$$

De plus, si $A \subset \mathbf{R}$ possède une borne supérieure on a: $(\forall a \in A, a \leq M) \implies \sup(A) \leq M$

Propriété 7: (\mathbf{Q} et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans \mathbf{R})

Tout réel est limite d'une suite de rationnels, et aussi limite d'une suite d'irrationnels.
 Pour la suite de rationnels qui tend vers x on pourra prendre par exemple

$$r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

Propriété 8: (nombres complexes de module 1)

Soit $z \in \mathbf{C}$. On a les équivalences suivantes:

$$z \in \mathcal{U} \iff \exists \theta \in \mathbf{R}, z = e^{i\theta} \iff \bar{z} = \frac{1}{z}$$

Propriété 9: (inégalité triangulaire)

Soit z_1, \dots, z_n des nombres complexes. On a

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

De plus on a égalité si et seulement si tous les z_i sont situés sur une même demi-droite:

$$\exists \theta \in \mathbf{R}, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_j \in \mathbf{R}_+, \quad z_j = \lambda_j e^{i\theta}$$

Cela équivaut à dire que tous les z_i non nuls ont le même argument.

Cela équivaut également à dire que les z_j sont positivement liés: $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_j \in \mathbf{R}_+, z_j = \lambda_j z_k$.

Propriété 10: (formulaire de trigonométrie et angle moitié)

Dès que les expressions précédentes sont bien définies, on a

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \quad ; \quad \sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \quad ; \quad \tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad ; \quad \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cos y \quad ; \quad \cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y \quad ; \quad \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$$

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{(\theta+\theta')}{2}} \left(e^{i\frac{(\theta-\theta')}{2}} + e^{i\frac{(\theta'-\theta)}{2}} \right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{(\theta+\theta')}{2}}$$

$$e^{i\theta} - e^{i\theta'} = e^{i\frac{(\theta+\theta')}{2}} \left(e^{i\frac{(\theta-\theta')}{2}} - e^{i\frac{(\theta'-\theta)}{2}} \right) = 2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{(\theta+\theta')}{2}}$$

Propriété 11: (description des racines n -ièmes de l'unité)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. L'équation $z^n = 1$ admet alors exactement n solutions distinctes sur \mathbf{C} et l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} ; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Variante: pour résoudre $z^n = a$ on trouve une solution particulière z_0 et en posant $Z = z/z_0$ on s'est ramené à $Z^n = 1$.

III Suites et séries numériques

Propriété 12: (suites récurrentes linéaires d'ordre 2- cas $K = \mathbf{R}$)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle et $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$. On note $(\mathcal{R}_{a,b})$ la relation

$$(\mathcal{R}_{a,b}) : \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On note Δ le discriminant de l'équation $x^2 = ax + b$ (appelée **équation caractéristique** de la suite).

(1) Si $\Delta > 0$ et si r_1, r_2 sont les racines réelles de l'équation caractéristique on a :

$$(u_n) \text{ vérifie } (\mathcal{R}_{a,b}) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

(2) Si $\Delta = 0$ et si r est l'unique racine réelle de l'équation caractéristique on a :

$$(u_n) \text{ vérifie } (\mathcal{R}_{a,b}) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = (\alpha + \beta n)r^n$$

(3) Si $\Delta < 0$ et si $r = \rho e^{i\theta}$ est une forme exponentielle d'une des deux racines de l'équation caractéristique on a :

$$(u_n) \text{ vérifie } (\mathcal{R}_{a,b}) \iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = \rho^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$$

Propriété 13: (limite et suites extraites)

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

(1) Si (u_n) tend vers une limite alors toute suite extraite de (u_n) tend vers cette même limite.

(2) Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers une même limite alors (u_n) tend vers cette limite commune.

Théorème 1: (de comparaison)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ trois suites réelles telles que $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang.

(1)(**Gendarmes**) Si (a_n) et (b_n) convergent toutes les deux vers ℓ alors (u_n) converge vers ℓ .

(2) Si (a_n) tend vers $+\infty$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.

(3) Si (b_n) tend vers $-\infty$ alors (u_n) tend vers $-\infty$.

Théorème 2: (de la limite monotone)

Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).

Plus précisément:

(1) Toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ croissante et majorée par M converge vers un réel $\ell \leq M$.

On a alors $\ell = \sup\{u_n ; n \in \mathbf{N}\}$ et en particulier $u_n \leq \ell$ pour tout n .

(2) Toute suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ décroissante et minorée par m converge vers un réel $\ell \geq m$.

On a alors $\ell = \inf\{u_n ; n \in \mathbf{N}\}$ et en particulier $u_n \geq \ell$ pour tout n .

(3) Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

(4) Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 3: (des suites adjacentes)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ des suites réelles.

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

De plus, si ℓ est cette limite commune et que (u_n) est croissante on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n$$

Propriété 14: (reformulation de l'équivalence)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes telles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$$

Propriété 15: (propriétés des suites équivalentes)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- (1) Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbf{K}^*$ alors $u_n \sim \ell$.
- (2) Si $u_n \sim v_n$ et que (u_n) possède une limite a (finie ou infinie) alors (v_n) tend aussi vers a .
- (3) Si (u_n) et (v_n) sont réelles et que $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe (strict) à partir d'un certain rang.

Propriété 16: (opérations sur les équivalents)

Soit $(u_n), (v_n), (a_n)$ et (b_n) des suites réelles ou complexes qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

(1) On suppose que $u_n \sim a_n$ et que $v_n \sim b_n$. Pour tout $p \in \mathbf{Z}$ on a:

$$|u_n| \sim |a_n| \quad ; \quad u_n \times v_n \sim a_n \times b_n \quad ; \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n} \quad ; \quad (u_n)^p \sim (a_n)^p$$

- (2) De plus, si (u_n) et (a_n) sont réelles et strictement positives à partir d'un certain rang on a: $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \quad (u_n)^\alpha \sim (a_n)^\alpha$
- (3) Si $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang et que $a_n \sim b_n$ alors $u_n \sim a_n$.

**Remarque 1: opérations sur o et \mathcal{O}**

- ✓ Pour des suites complexes (u_n) et (v_n) , on pourra souvent se ramener à une étude réelle en utilisant que $u_n = o(v_n)$ équivaut à $|u_n| = o(|v_n|)$ (ceci n'est pas valable pour la relation \sim).
- ✓ Dès que les objets sont bien définis on dispose des relations suivantes ($\lambda \in \mathbf{K}^*$):

$$\lambda o(u_n) = o(\lambda u_n) = o(u_n) \quad ; \quad o(u_n) + o(u_n) = o(u_n) \quad ; \quad o(u_n) \times o(v_n) = o(u_n v_n)$$

$$\begin{cases} a_n \sim b_n \\ b_n = o(u_n) \end{cases} \implies a_n = o(u_n)$$

$$\mathcal{O}(u_n) + \mathcal{O}(u_n) = \mathcal{O}(u_n) \quad ; \quad \mathcal{O}(u_n) \times \mathcal{O}(v_n) = \mathcal{O}(u_n v_n) \quad ; \quad \mathcal{O}(u_n) \times o(v_n) = o(u_n v_n)$$

$$\begin{cases} a_n = o(u_n) \\ a_n \sim u_n \end{cases} \implies a_n = \mathcal{O}(u_n) \quad ; \quad \begin{cases} a_n = o(u_n) \\ u_n = \mathcal{O}(v_n) \end{cases} \implies a_n = o(v_n) \quad ; \quad \begin{cases} a_n = \mathcal{O}(u_n) \\ u_n = \mathcal{O}(v_n) \end{cases} \implies a_n = \mathcal{O}(v_n)$$

Propriété 17: (reformulation des croissances comparées usuelles)

Si $a > 1$ et $\beta > \alpha > 0$ on a

$$(\ln n)^\alpha = o(n^\beta) \quad ; \quad n^\beta = o(a^n) \quad ; \quad a^n = o(n!) \quad ; \quad n! = o(n^n) \quad ; \quad n^\alpha = o(n^\beta) \quad ; \quad \alpha^n = o(\beta^n)$$

Propriété 18: (équivalents usuels)

Soit (u_n) est une suite réelle ne s'annulant pas à partir d'un certain rang vérifiant $u_n \rightarrow 0$, et $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

On a:

$$\begin{aligned} \sin(u_n) &\sim u_n & ; & & \tan(u_n) &\sim u_n & ; & & \cos(u_n) - 1 &\sim -\frac{(u_n)^2}{2} \\ e^{u_n} - 1 &\sim u_n & ; & & \ln(1 + u_n) &\sim u_n & ; & & (1 + u_n)^\alpha - 1 &\sim \alpha u_n \end{aligned}$$

Propriété 19: (séries convergentes)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbf{K} .

- (1) Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.
 (2) La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$$

- (3) Si la série $\sum |u_n|$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et on a

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Propriété 20: (théorème de comparaison des séries à termes positifs)

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles à termes positifs.

On suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0 .

- (1) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
 (2) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Propriété 21: (utilisation des relations de comparaison)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'éléments de \mathbf{K} .

- (1) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum |v_n|$ converge alors $\sum |u_n|$ converge.
 (2) Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum |v_n|$ converge alors $\sum |u_n|$ converge.
 (3) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ sont de même nature.

On appliquera souvent ce résultat dans le cas des séries à termes positifs: les conditions de convergence absolue sont alors des simples conditions de convergence.

Propriété 22: (série géométrique)

- (1) La série $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. On a alors: $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

- (2) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$. On a: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

- (3) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

IV Systèmes linéaires et matrices



Remarque 2: méthode du pivot de Gauss et résolution d'un système échelonné

- ✓ Dans la pratique, on utilise les OEL pour transformer le système de départ en différents systèmes équivalents jusqu'à arriver à un système échelonné:
On commence par éliminer une inconnue (par exemple x_1) dans $(n - 1)$ équations: on choisit une équation contenant x_1 dont le coefficient non nul est $a_{k,1}$ (c'est le premier pivot), on place cette ligne en première position puis on effectue des opérations du type $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_1$ de manière à éliminer x_1 des lignes L_2, \dots, L_n ;
On ne touche plus ensuite à L_1 et on répète cette stratégie pour éliminer une autre inconnue dans le sous-système restant qui comporte au plus $(n - 1)$ équations avec au plus $(p - 1)$ inconnues ;
La méthode s'arrête quand il n'y a plus d'inconnues à éliminer dans les lignes qui restent: on a obtenu un système échelonné.
- ✓ Si l'une des équations auxiliaires est du type $0 = b_i \neq 0$ alors le système échelonné n'admet aucune solution. Sinon il est compatible et on peut supprimer ces équations auxiliaires;
- ✓ Si le système est compatible et si $r = p$ (système triangulaire) le système admet une unique solution: on peut la déterminer en remontant le système;
- ✓ Si le système est compatible et si $r < p$ le système admet une infinité de solutions: on trouve la forme générale en commençant par exprimer x_r en fonction des paramètres puis on remonte le système.
- ✓ On veillera à toujours se servir d'une ligne "pivot" à chaque étape qu'il s'agira de ne pas modifier pour éviter toute erreur: on examinera par exemple l'effet des opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ faites lors de la même étape.
- ✓ Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ on peut transformer A en une matrice échelonnée T par opérations élémentaires sur les lignes: il existe alors $P = P_1 \dots P_r \in GL_p(\mathbf{K})$ telle que $PA = E$ échelonnée. On peut ensuite transformer E en une matrice diagonale simple J_r (définie ci-dessous) par opérations sur les colonnes: il existe $Q = Q_1 \dots Q_s \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $EQ = J_r$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}), \exists (P, Q) \in GL_p(\mathbf{K}) \times GL_n(\mathbf{K}), \quad PAQ = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n+r} \end{pmatrix}$$
- ✓ Si $A \in GL_n(\mathbf{K})$ alors on peut réussir à obtenir I_n en utilisant uniquement les opérations élémentaires sur les lignes (ou uniquement sur les colonnes). Cela correspond au cas où $E = I_n = J_n$ dans le point précédent.
On a alors $PA = I_n$ avec $P \in GL_n(\mathbf{K})$ (ou $AQ = I_n$ avec $Q \in GL_n(\mathbf{K})$ ce qui implique $A^{-1} = P$ (ou $A^{-1} = Q$): c'est la **méthode de Gauss de calcul de l'inverse**, appelée parfois méthode des miroirs.

Propriété 23: (matrices élémentaires)

(1) Si $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $E_{k,\ell} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ alors

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$$

(2) Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est combinaison linéaire des matrices $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Plus précisément, si $M = (m_{i,j})$ on a

$$M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{i,j} E_{i,j}$$

Propriété 24: (opérations sur les lignes et colonnes)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$.

(1) Si $B = [C_1 \mid \cdots \mid C_q]$ est décrite par colonnes alors la description par colonnes de AB est $AB = [AC_1 \mid \cdots \mid AC_q]$.

(2) Si $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ est décrite par lignes alors la description par lignes de AB est $AB = \begin{bmatrix} L_1 B \\ \vdots \\ L_n B \end{bmatrix}$.

(3) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ que l'on écrit $X = \sum_{i=1}^p x_i E_{i,1}$, et soit $A = [C_1 \mid \cdots \mid C_p]$ décrite par colonne. On a

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad A E_{i,1} = C_i \quad ; \quad AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p = \sum_{i=1}^p x_i C_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$$

(4) La matrice obtenue en effectuant une transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ sur une matrice A est la matrice $T_{i,j,\alpha} A$.

La matrice obtenue en effectuant une transvection $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$ sur une matrice A est la matrice $A T_{i,j,\alpha}$.

La matrice obtenue en effectuant une dilatation $L_i \leftarrow \beta L_i$ sur une matrice A est la matrice $D_{i,\beta} A$.

La matrice obtenue en effectuant une dilatation $C_i \leftarrow \beta C_i$ sur une matrice A est la matrice $A D_{i,\beta}$.

La matrice obtenue en effectuant une permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ sur une matrice A est la matrice $P_{i,j} A$.

La matrice obtenue en effectuant une permutation $C_i \leftrightarrow C_j$ sur une matrice A est la matrice $A P_{i,j}$.

Propriété 25: (opérations sur matrices triangulaires ou diagonales)

La somme et le produit de deux matrices triangulaires supérieures sont encore des matrices triangulaires supérieures. Il en est de même pour des matrices triangulaires inférieures, ou des matrices diagonales.

Propriété 26: (formule du binôme du Newton)

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB = BA$.

On a

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Propriété 27: (caractérisation de l'inversibilité de M)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) M est inversible,

(ii) Le système $MX = 0_{\mathbf{K}^n}$ d'inconnue $X \in \mathbf{K}^n$ est de Cramer,

(iii) $\det(M) \neq 0$,

(iv) $\text{rg}(M) = n$,

(v) Les vecteurs colonnes (resp. lignes) de M forment une base de \mathbf{K}^n ,

(vi) M est inversible à droite (resp. à gauche): il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $MB = I_n$ (resp. $BM = I_n$)

Propriété 28: (inversibilités particulières)

(1) Un produit de matrices inversibles est encore inversible.

(2) Une matrice triangulaire T est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls.

Dans ce cas T^{-1} est encore une matrice triangulaire (de même type que T).

(3) Les matrices associées aux opérations élémentaires sont inversibles.

V Algèbre linéaire

Propriété 29: (caractériser un sev)

(1) Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et F un ensemble.

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les conditions suivantes sont toutes réalisées:

$$F \subset E \quad ; \quad 0_E \in F \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x, y) \in F^2, (\lambda x + y) \in F$$

(2) Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ avec u_1, \dots, u_p éléments d'un \mathbf{K} -ev E , alors F est un sev de E .

(3) Toute intersection non vide de sous-espaces vectoriel d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .

(4) Si E, F sont des \mathbf{K} -espaces vectoriels et que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\text{Ker}(u)$ est un sev de E , et $\text{Im}(u)$ est un sev de F .

Propriété 30: (égalité de deux sev en dimension finie)

Soit F_1, F_2 des sev d'un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie.

$$F_1 = F_2 \iff \begin{cases} F_1 \subset F_2 \\ \dim(F_1) = \dim(F_2) \end{cases}$$

Propriété 31: (caractérisation de la somme directe)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E .

Les propriétés suivantes sont équivalentes (seulement si E de dimension finie pour les deux dernière équivalence):

(i) $E = F_1 \oplus F_2$,

(ii) $\forall x \in E, \exists ! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$

(iii) $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$,

(iv) $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$,

(v) $F_1 + F_2 = E$ et $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Propriété 32: (formule de Grassmann)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Théorème 4: (classification des espaces vectoriels de dimension finie)

Des \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Propriété 33: (base et décomposition)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

(1)(décomposition associée à une base)

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E et $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On pose $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

On a alors que $E = F \oplus G$.

(2)(base associée à une décomposition)

On suppose $E = F \oplus G$. On pose $\mathcal{B}_F = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (v_1, \dots, v_q)$ une base de G .

On a alors que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de E .

Propriété 34: (caractérisation des familles libres ou génératrice en dimension finie)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et (u_1, \dots, u_p) une famille finie de $p \geq 1$ éléments de E .
Soit \mathcal{B} une base de E .

$$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \text{ est libre} \iff \text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p \iff \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = p$$

$$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \text{ est génératrice de } E \iff \text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(E) \iff \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = \dim(E)$$

$$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p) \text{ base de } E \iff \text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p = \dim(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in GL_p(\mathbf{K})$$

Propriété 35: (opérations sur les familles libres ou génératrices)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E .

- (1) Si \mathcal{F} est génératrice de E alors toute sur-famille de \mathcal{F} formée d'éléments de E est encore génératrice de E .
- (2) Si \mathcal{F} est génératrice de E et qu'on supprime de \mathcal{F} un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathcal{F} on obtient encore une famille génératrice de E .
- (3) Si \mathcal{F} est libre alors toute sous-famille de \mathcal{F} est encore une famille libre.
- (4) Si \mathcal{F} est libre et qu'on ajoute à \mathcal{F} un vecteur de E qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} alors on obtient encore une famille libre.

Propriété 36: (rang d'une composée)

Soit E, F et G des \mathbf{K} -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

- (1) Si u est un isomorphisme et que v est de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$.
- (2) Si v est un isomorphisme et que u est de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.
- (3) Si u et v sont de rang fini alors $v \circ u$ est de rang fini et $\text{rg}(v \circ u) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\}$.

Propriété 37: (images d'une famille liée ou génératrice)

Soit E, F deux \mathbf{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (1) Si u est surjective alors l'image par u de toute famille génératrice de E est génératrice de F .
- (2) Si u est injective alors l'image par u de toute famille libre de E est une famille libre de F .
- (3) Si u est bijective alors l'image par u de toute base de E est une base de F .

Propriété 38: (de $\mathcal{L}(E, F)$, de $\mathcal{L}(E)$ et de $GL(E)$)

Soit E, F des \mathbf{K} -espaces vectoriels.

- (1) L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbf{K} -espace vectoriel. Si E, F sont de dimensions finies alors

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

- (2) Le \mathbf{K} -espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition.
- (3) L'ensemble $GL(E)$ est stable par produit et passage à l'inverse. Ce n'est pas un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété 39: (calcul explicite de $\text{Im}(u)$)

Soit E, F deux \mathbf{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si (e_1, \dots, e_n) est une famille génératrice de E alors

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

C'est en particulier vrai si (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Propriété 40: (isomorphisme induit et formule du rang)

Soit E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(1) Si $E = S \oplus \text{Ker}(u)$ alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

(2) Si E est de dimension finie alors

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim(E)$$

Propriété 41: (caractérisation des isomorphismes)

Soit E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de même dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

- (i) u bijectif,
- (ii) u surjectif,
- (iii) u injectif.

Propriété 42: (construction application linéaire sur une base ou une décomposition)

Soit E, F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels.

(1) Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E et (e'_1, \dots, e'_n) une famille finie de vecteurs de F alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u(e_i) = e'_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

L'application u vérifie alors: $u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i$

(2) Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$ alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. L'application u vérifie alors, pour $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$: $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$

Propriété 43: (caractérisation des projecteurs et des symétries)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et $u : E \rightarrow E$ une application.

(1) L'application u est un projecteur si et seulement si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u \circ u = u$.

Dans ce cas u est le projecteur sur $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u)$ et on a donc

$$E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) \quad ; \quad \forall x \in E, \quad x = u(x) + (x - u(x))$$

(2) L'application u est une symétrie si et seulement si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u \circ u = \text{Id}_E$.

Dans ce cas u est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(u + \text{Id}_E)$ et on a donc

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E) \quad ; \quad \forall x \in E, \quad x = \frac{u(x) + x}{2} + \frac{x - u(x)}{2}$$

Théorème 5: (de la base incomplète)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel possédant une famille génératrice finie \mathcal{F} .

Toute sous-famille libre de E peut être complétée, à l'aide d'éléments de \mathcal{F} , en une base de E .

Propriété 44: (familles de taille $\dim(E)$)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Si \mathcal{F} est une famille de E de taille exactement $\dim(E)$ alors:

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ est libre}$$

Propriété 45: (caractérisations des hyperplans)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E .

Les conditions suivantes sont équivalentes (seulement si E de dimension finie pour la dernière équivalence):

- (i) H est un hyperplan (c'est à dire le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E),
- (ii) Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$ (si $H = \text{Ker}(\varphi)$ on a $D = \text{Vect}(x)$ avec $\varphi(x) \neq 0$).
- (iii) $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Propriété 46: (changement de base pour un vecteur)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

Si $x \in E$ on a alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$$

Propriété 47: (changement de base pour une application linéaire)

Soit E et F deux \mathbf{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Soit \mathcal{B}_E et \mathcal{B}'_E deux bases de E , et \mathcal{B}_F et \mathcal{B}'_F deux bases de F .

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ on a la relation:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F}(\text{id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}(\text{id}_E) = P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}(u) \times P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E}$$

Propriété 48: (changement de base pour un endomorphisme)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E .

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ on a la relation:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \times P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$$

Propriété 49: (similitude vs changement de base)

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (éventuellement) différentes.

Plus précisément: A et B sont semblables si et seulement si il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ et deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de \mathbf{K}^n tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

VI Analyse des fonctions réelles

Propriété 50: (ce que dit la limite sur la fonction)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application définie au voisinage de a .
On suppose que f possède une limite finie ℓ en a .

- (1) Si $\ell \neq 0$ alors f est du signe (strict) de ℓ au voisinage de a .
- (2) Si $\ell < M$ alors $f(x) < M$ au voisinage de a .

Propriété 51: (ce que dit la fonction sur sa limite)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications définies au voisinage de a .
On suppose que f tend vers une limite finie ℓ en a et que g tend vers une limite finie ℓ' en a .

- (1) Si $f(x) \leq 0$ au voisinage de a alors on a $\ell \leq 0$.
- (2) Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a alors on a $\ell \leq \ell'$.

Théorème 6: (de comparaison)

Soit $u : I \rightarrow \mathbf{R}, v : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ trois applications définies au voisinage de a .
On suppose qu'au voisinage de a on a l'encadrement $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.

- (1) (**Gendarmes**) Si u et v tendent vers une limite finie ℓ en a alors f tend aussi vers ℓ en a .
- (2) Si u tend vers $+\infty$ en a alors f tend vers $+\infty$ en a .
- (3) Si v tend vers $-\infty$ en a alors f tend vers $-\infty$ en a .

Théorème 7: (de la limite monotone)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ avec I intervalle ouvert.

Si f est monotone sur I alors f admet une limite (finie ou infinie) aux bornes de l'intervalle I .
De plus: si f est bornée au voisinage de la borne étudiée alors la limite en cette borne est finie.

Propriété 52: (reformulation de l'équivalence)

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions définies au voisinage de a .

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$$

Propriété 53: (propriété des fonctions équivalentes)

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions définies au voisinage de a .

- (1) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}^*$ alors $f(x) \underset{a}{\sim} \ell$.
- (2) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} b$ alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} b$.
- (3) Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont de même signe (strict) au voisinage de a .

Propriété 54: (opérations sur les équivalents)

Soit f, g, u, v des fonctions définies sur D à valeurs dans \mathbf{R} qui sont définies au voisinage de a .
On suppose que $f \underset{a}{\sim} u$ et que $g \underset{a}{\sim} v$.

(1) On a (avec $p \in \mathbf{N}$):

$$|f| \underset{a}{\sim} |u| \quad ; \quad f \times g \underset{a}{\sim} u \times v \quad ; \quad f^p \underset{a}{\sim} u^p$$

(2) Si g ne s'annule pas au voisinage de a on a:

$$\frac{f}{g} \underset{a}{\sim} \frac{u}{v}$$

(3) Si f et u sont strictement positives au voisinage de a on a (avec $\alpha \in \mathbf{R}^*$):

$$f^\alpha \underset{a}{\sim} u^\alpha$$

(4) Si $w : I \rightarrow D$ est définie au voisinage de b et que $w(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$ alors

$$f \circ w \underset{b}{\sim} u \circ w$$

Propriété 55: (équivalence par encadrement)

Soit $u : D \rightarrow \mathbf{R}, v : D \rightarrow \mathbf{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ trois applications définies au voisinage de a .
On suppose qu'au voisinage de a on a l'encadrement $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.

Si $u \underset{a}{\sim} v$ alors $f \underset{a}{\sim} u$.

Remarque 3: opérations sur o et \mathcal{O}

- ✓ Pour des fonctions à valeurs complexes on pourra souvent se ramener à une étude réelle en utilisant que $f = o(g)$ équivaut à $|f| = o(|g|)$ (ceci n'est pas valable pour la relation \sim).
- ✓ Si $f = o_a(g)$ et si $w(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} a$ alors $f \circ w = o_b(g \circ w)$. La version \mathcal{O} est encore valable.
- ✓ Dès que les objets sont bien définis et que l'étude se fait au même point on dispose des relations suivantes ($\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $\alpha > 0$):

$$\lambda o(g) = o(\lambda g) = o(g) \quad ; \quad o(g) + o(g) = o(g) \quad ; \quad o(f) \times o(g) = o(fg)$$

$$\begin{cases} f \sim u \\ u = o(g) \end{cases} \implies f = o(g)$$

$$\mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(g) \quad ; \quad \mathcal{O}(f) \times \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(fg) \quad ; \quad \mathcal{O}(f) \times o(g) = o(fg)$$

$$\begin{cases} f = o(g) \\ f \sim g \end{cases} \implies f = \mathcal{O}(g) \quad ; \quad \begin{cases} f = o(u) \\ u = \mathcal{O}(g) \end{cases} \implies f = o(g) \quad ; \quad \begin{cases} f = \mathcal{O}(u) \\ u = \mathcal{O}(g) \end{cases} \implies f = \mathcal{O}(g)$$

Propriété 56: (reformulation des croissances comparées usuelles)

Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ des réels strictement positifs.

(1) Si $a > 1$ on a

$$(\ln x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \quad ; \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(a^x) \quad ; \quad |\ln x|^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

(2) Si $\alpha < \beta$ on a

$$x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \quad ; \quad x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha) \quad ; \quad \alpha^x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\beta^x)$$

Propriété 57: (équivalents classiques)

(1) Soit $P(x) = \sum_{k=p}^n a_k x^k$ un polynôme à coefficients dans \mathbf{R} avec $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$:

$$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p \quad ; \quad P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n \quad ; \quad P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n$$

(2) Si $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable en $x_0 \in D$ avec $f'(x_0) \neq 0$ alors:

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0)$$

(3) On a (avec $\alpha \in \mathbf{R}^*$):

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x \quad ; \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad \ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1 \quad ; \quad \sinh x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad \cosh x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad ; \quad \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad \tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad ; \quad \arctan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

Théorème 8: (valeurs intermédiaires) (TVI)

Si I est un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue alors $f(I)$ est aussi un intervalle.

Applications directes:

Si f est continue et que $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ (ou $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$) alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Si f est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle I alors f garde un signe constant (strict) sur I .

Théorème 9: (bornes atteintes sur un segment)

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue.

(1) L'application f est bornée sur le segment $[a, b]$ et atteint ses bornes.

(2) L'image par f du segment $[a, b]$ est un segment.

Théorème 10: (de la bijection version complète)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue et strictement monotone sur l'intervalle I .

(1) La fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$ qui est obtenu avec les limites de f au bord de I ;

(2) La fonction réciproque est aussi continue et strictement monotone sur $f(I)$ et elle est de même monotonie que f ;

(3) Si f est de plus dérivable sur I et que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\forall y \in J, \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Propriété 58: (caractère \mathcal{C}^n d'une réciproque)

Soit $f : I \rightarrow J$ une application bijective de classe \mathcal{C}^n avec $n \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$.

Si f' ne s'annule pas sur I alors l'application réciproque f^{-1} est de classe \mathcal{C}^n sur J .

Propriété 59: (dérivabilité et $DL_1(x_0)$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application et $x_0 \in I$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un réel ℓ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \ell(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Propriété 60: (dérivée et extremum local)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application dérivable et $x_0 \in I$.

Si f admet un extremum local en x_0 et que x_0 n'est pas une extrémité de I alors $f'(x_0) = 0$.

Propriété 61: (formule de Leibniz)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ des fonctions n fois dérivables sur I où $n \in \mathbf{N}^*$.

La fonction $f \times g$ est alors n fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Théorème 11: (Rolle et accroissements finis)

Soit deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

(1) **(Rolle)** Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(2) **(Accroissements Finis)** Il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Propriété 62: (inégalité des accroissements finis)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application dérivable I . On suppose qu'il existe un réel positif M tel que: $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$

Alors f est M -lipschitzienne

$$\forall (x, y) \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Variante pour $f : I \rightarrow \mathbf{C}$:

La conclusion reste valable si $f : I \rightarrow \mathbf{C}$ est \mathcal{C}^1 et qu'il existe un réel positif M tel que: $\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$.

Propriété 63: (signe de la dérivée et variations)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application dérivable sur I .

(1) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .

(2) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .

(3) f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ et qu'il n'existe aucun intervalle non trivial $]a, b[$ sur lequel f' soit identiquement nulle.

Théorème 12: (de la limite de la dérivée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue et $x_0 \in I$. On suppose que f dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$.

(1) Si $f'(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \rightarrow x_0} \ell \in \mathbf{R}$ alors f dérivable en x_0 , $f'(x_0) = \ell$ et la fonction f' ainsi définie est continue en x_0 .

(2) Si $f'(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \rightarrow x_0} \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0 .

Théorème 13: (formule de Taylor avec reste intégral) (HP)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} et $a \in I$. On a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$$

Propriété 64: (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} et $a \in I$ avec $|f^{(n+1)}| \leq M_{n+1}$ sur I . On a

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

Propriété 65: (formule de Taylor-Young)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$ de classe \mathcal{C}^n et $a \in I$. On a

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Propriété 66: (unicité et équivalent)

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ une application définie au voisinage de a et admettant un $DL_n(a)$ avec $n \in \mathbf{N}$.

(1)(unicité) Ce $DL_n(a)$ est unique.

(2)(équivalents par DL) Si $f(x) = a_p(x-a)^p + \dots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$ au voisinage de a avec $a_p \neq 0$ alors:

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p$$

Propriété 67: (DL et parité)

Soit $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie au voisinage de 0 et admettant le $DL_n(0)$ suivant avec $n \in \mathbf{N}$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

(1) Si f est paire alors $a_{2k+1} = 0$ pour tout k tel que $(2k+1) \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(2) Si f est impaire alors $a_{2k} = 0$ pour tout k tel que $2k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Propriété 68: (DL d'une primitive)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue avec $a \in I$ et F une primitive de f sur I .

On suppose que f possède un $DL_n(a)$ donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Alors dans ce cas F admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par

$$F(x) \underset{x \rightarrow a}{=} F(a) + a_0(x-a) + a_1 \frac{(x-a)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Propriété 69: $DL_n(0)$ classiques

On a les développements limités suivants en 0 (pour $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) & ; \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) & ; \quad \cosh x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sinh x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) & ; \quad \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) & ; \quad \arctan x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad ; \quad (1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$$

Propriété 70: (opérations sur les $DL_n(0)$)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f et g deux applications définies au voisinage de 0 et admettant chacune un $DL_n(0)$.

Au voisinage de 0, on écrit $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$ ces deux développements limités.

(1) La fonction somme $(f + g)$ admet un $DL_n(0)$. Plus précisément, on a au voisinage de 0

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

(2) La fonction produit $(f \times g)$ admet un $DL_n(0)$. Plus précisément, au voisinage de 0 :

$$f(x) \times g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) \times Q(x) + o(x^n)$$

et le $DL_n(0)$ s'obtient en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans $P(x) \times Q(x)$.

(3) Si $Q(0) = 0$ alors la fonction composée $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$. Plus précisément au voisinage de 0

$$(f \circ g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (P \circ Q)(x) + o(x^n)$$

et le $DL_n(0)$ s'obtient en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans $(P \circ Q)(x)$.

Propriété 71: (stricte positivité de l'intégrale)

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$.

(1) Si f est continue et positive et d'intégrale nulle alors f est nulle.

(2) Si f est continue et positive et non identiquement nulle alors son intégrale est strictement positive.

Théorème 14: (convergence des sommes de Riemann)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est continue alors la suite $(S_n(f))$ converge vers l'intégrale de f de a à b quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

Théorème 15: (théorème fondamental de l'intégration)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue et $a \in I$.

L'application $F : I \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $F' = f$.

En particulier: toute fonction continue sur I possède une primitive sur I .

Propriété 72: (intégration par parties - IPP)

Soit $u : I \rightarrow \mathbf{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbf{R}$ deux applications de classe \mathcal{C}^1 sur I et $(a, b) \in I^2$.

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Propriété 73: (changement de variable)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue et $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 . On a alors, pour tout $(a, b) \in J^2$,

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Propriété 74: (intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique)

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue.

(1) Si f est paire alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a:
$$\int_{-x}^x f(t)dt = 2 \int_0^x f(t)dt$$

(2) Si f est impaire alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a:
$$\int_{-x}^x f(t)dt = 0$$

(3) Si f est périodique de période T alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a:
$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Propriété 75: (convexité et corde ou sécante)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

(1) On a

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

(2) On a

$$\forall t \in (I \cap]-\infty, a]) \cup (I \cap]b, +\infty]), \quad f(t) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

Propriété 76: (convexité et tangente)

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ convexe et dérivable et $a \in I$. On a

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$$

VII Polynômes et fonctions rationnelles

Propriété 77: (des opérations usuelles)

Soit P, Q, R des polynômes de $\mathbf{K}[X]$.

(1) On a

$$\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \quad ; \quad \deg(P) \neq \deg(Q) \implies \deg(P + Q) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \quad ; \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \deg(P^n) = n \times \deg(P)$$

(2) On a

$$P + Q = Q + P \quad ; \quad PQ = QP \quad ; \quad 0_{\mathbf{K}[X]}P = 0_{\mathbf{K}[X]} \quad ; \quad 1_{\mathbf{K}[X]}P = P$$

$$\text{(intégrité)} \quad PQ = 0_{\mathbf{K}[X]} \iff (P = 0_{\mathbf{K}[X]} \text{ OU } Q = 0_{\mathbf{K}[X]})$$

$$(P + Q) + R = P + (Q + R) \quad ; \quad (PQ)R = P(QR) \quad ; \quad (P + Q)R = PR + QR = R(P + Q)$$

$$\text{(formule du binôme)} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad (P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$$

Propriété 78: (famille de polynômes échelonnés en degré)

Toute famille finie de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts est une famille libre de $\mathbf{K}[X]$.

Propriété 79: (division euclidienne)

Soit A et B deux éléments de $\mathbf{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbf{K}[X])^2$ tel que

$$\begin{cases} A = QB + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On appelle Q le **quotient** de la division euclidienne de A par B , et R le **reste** de la division euclidienne de A par B .

Propriété 80: (de la dérivation)

Soit P, Q deux éléments de $\mathbf{K}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

(1) On a

$$(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q' \quad ; \quad (P \times Q)' = P'Q + PQ' \quad ; \quad (P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$$

(2) Pour tout $r \in \mathbf{N}$ on a: $(\lambda P + \mu Q)^{(r)} = \lambda P^{(r)} + \mu Q^{(r)}$

(3)(Leibniz) Pour tout $r \in \mathbf{N}$ on a

$$(P \times Q)^{(r)} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} P^{(k)} \times Q^{(r-k)}$$

(4) Pour tout $r \in \mathbf{N}$ on a $\deg(P^{(r)}) \leq \deg(P) - r$.

Plus précisément:

$$\forall r \in \mathbf{N}, \quad \deg(P^{(r)}) = \begin{cases} \deg(P) - r & \text{si } r \leq \deg(P) \\ -\infty & \text{si } r > \deg(P) \end{cases}$$

Propriété 81: (formule de Taylor)

Soit P un élément de $\mathbf{K}[X]$ et $a \in \mathbf{K}$. On a

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

Théorème 16: (de D'Alembert-Gauss)

Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ admet au moins une racine dans \mathbf{C} .

Reformulation: Tout polynôme non nul de $\mathbf{C}[X]$ est scindé sur \mathbf{C} .

Propriété 82: (racines et factorisation)

Soit P un élément non nul de $\mathbf{K}[X]$ et $m \in \mathbf{N}^*$.

(1) Le scalaire $\alpha \in \mathbf{K}$ est racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

(2) Le scalaire $\alpha \in \mathbf{K}$ est racine d'ordre m de P si et seulement si

$$\exists Q \in \mathbf{K}[X], \quad P = (X - \alpha)^m Q \quad \text{avec} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

(3) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des racines distinctes de P d'ordres de multiplicité respectivement au moins m_1, \dots, m_p alors

$$\exists Q \in \mathbf{K}[X], \quad P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{m_i} \times Q$$

Propriété 83: (nombre de racines)

Soit P un élément de $\mathbf{K}[X]$.

(1) Si P est de degré $n \geq 0$ alors P admet au plus n racines (comptées avec leurs multiplicités).

(2) On suppose que $P \in \mathbf{K}_n[X]$. Si P admet au moins $(n + 1)$ racines (comptées avec leurs multiplicités) alors $P = 0$.

(3) Si P admet une infinité de racines alors $P = 0$.

Propriété 84: (caractérisation de l'ordre de multiplicité)

Soit P un élément non nul de $\mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$ et $m \in \mathbf{N}^*$.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) α est racine d'ordre m de P ,

(ii) Pour tout $k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$ on a $P^{(k)}(\alpha) = 0$, et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Conséquence: Si α est racine d'ordre $m \geq 1$ de P alors α est racine d'ordre $(m - 1)$ de P' .

Propriété 85: (racines complexes d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$)

Soit P un élément de $\mathbf{R}[X]$ et $(\alpha, m) \in \mathbf{C} \times \mathbf{N}^*$.

Le scalaire α est racine d'ordre m de P si et seulement si $\bar{\alpha}$ est racine d'ordre m de P .

Propriété 86: (des polynômes scindés)

Soit P un élément non nul de $\mathbf{K}[X]$.

(1) P est scindé sur \mathbf{K} si et seulement si la somme des ordres de multiplicités de ses racines dans \mathbf{K} est égale à son degré.

(2) Si $P \in \mathbf{K}_n[X]$ et possède n racines distinctes dans \mathbf{K} alors P est scindé sur \mathbf{K} .

(3) Si P est scindé sur \mathbf{K} de degré n et que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ alors on a les relations:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ; \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Théorème 17: (décomposition en irréductible dans $\mathbf{K}[X]$)

Tout polynôme P non constant de $\mathbf{K}[X]$ est le produit de polynômes irréductibles dans $\mathbf{K}[X]$.

Propriété 87: (cas de $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$)

- (1) Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
 (2) Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont: les polynômes de degré 1, et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Propriété 88: (caractérisation par fonctions polynomiales)

Deux polynômes P, Q de $\mathbf{K}[X]$ sont égaux si et seulement si leurs fonctions polynomiales associées coïncident sur une partie infinie de \mathbf{K} .

Théorème 18: (décomposition en éléments simples)

Soit $(P, Q) \in (\mathbf{K}[X])^2$ avec Q non constant que l'on suppose scindé à racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.
 On a alors qu'il existe un unique $E \in \mathbf{K}[X]$ et un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k}$$

De plus: en notant λ le coefficient dominant de Q on a

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} = \frac{P(\alpha_k)}{\lambda \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)}$$

De plus: si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $E = 0$, et si $\deg(P) \geq \deg(Q)$ alors $\deg(E) = \deg(P) - \deg(Q)$.

VIII Équations différentielles

Propriété 89: (ensemble des solutions d'une EDL)

Soit (\mathcal{E}) une équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \{1, 2\}$ et (\mathcal{E}_H) l'équation homogène associée.
On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions sur I de (\mathcal{E}) et \mathcal{S}_H l'ensemble des solutions sur I de (\mathcal{E}_H) .

- (1) L'ensemble \mathcal{S}_H est un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n .
(2) Si y_p est une solution particulière de (\mathcal{E}) alors on déduit \mathcal{S} de \mathcal{S}_H par l'égalité

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H = \{y = y_p + y_H \mid y_H \in \mathcal{S}_H\}$$

(3)(problème de Cauchy)

Si $n = 1$ alors pour tout couple $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{K}$ il existe une unique solution y de (\mathcal{E}) vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Si $n = 2$ alors pour tout triplet $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbf{K}^2$ il existe une unique solution y de (\mathcal{E}) vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

Propriété 90: (homogène - ordre 1)

Soit $a : I \rightarrow \mathbf{K}$ une application continue sur I et A est une primitive de a sur I .

L'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ est

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto y(t) = \lambda e^{-A(t)} ; \lambda \in \mathbf{K}\}$$

Propriété 91: (homogène - ordre 2 coefficients constants - $\mathbf{K} = \mathbf{R}$)

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On considère l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ et on note \mathcal{S}_H son ensemble des solutions sur I .
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

- (1) Si $\Delta > 0$ et que les solutions de l'équation caractéristique sont r_1 et r_2 alors

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

- (2) Si $\Delta = 0$ et que l'unique solution de l'équation caractéristique est r alors

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto y(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt} ; (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

- (3) Si $\Delta < 0$ et si $\alpha + i\beta$ est solution de l'équation caractéristique alors

$$\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto y(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$



Remarque 4: solutions particulières ordre 1

- ✓ Si l'équation s'écrit $y' + ay = P(t)e^{\omega t}$ avec $P \in \mathbf{K}[X]$ et $(a, \omega) \in \mathbf{K}^2$ on cherchera une solution particulière du type $y_p(t) = Q(t)e^{\omega t}$ où $Q \in \mathbf{K}[X]$ est à déterminer avec $\deg(Q) \leq \deg(P) + 1$ (et même $\deg(Q) \leq \deg(P)$ si $\omega \neq -a$).
- ✓ **Variation de la constante:** on cherche une fonction $\lambda : I \rightarrow \mathbf{K}$ dérivable telle que $t \mapsto y_p(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ soit solution de (\mathcal{E}) . On est alors ramené à un calcul de primitive pour déterminer λ .
- ✓ On remarquera que si $a \in \mathbf{R}$ et si $y : I \rightarrow \mathbf{C}$ est solution de $z' + az = c(t)$ alors $\operatorname{Re}(y)$ est solution de $z' + az = \operatorname{Re}(c(t))$, et $\operatorname{Im}(y)$ est solution de $z' + az = \operatorname{Im}(c(t))$.
Cela permet d'appliquer le raisonnement précédent avec $c(t) = P(t)e^{i\omega t}$ ou bien $c(t) = e^{(\lambda+i\mu)t}$ pour résoudre une équation réelle ayant un second membre du type $P(t)\cos(\omega t)$ ou $P(t)\sin(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbf{R}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$, ou bien du type $\cos(\mu t)e^{\lambda t}$ ou $\sin(\mu t)e^{\lambda t}$ avec $(\mu, \lambda) \in \mathbf{R}^2$.

IX Espaces pré-hilbertiens

Propriété 92: (produit scalaire sur l'espace des fonctions continues)

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ des réels avec $a < b$.

L'application suivante définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R}) &\rightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) &\mapsto \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \end{aligned}$$

Propriété 93: (de la norme euclidienne)

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\| \cdot \|$.

(1)(Cauchy-Schwarz) Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$

On a de plus égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

(2)(Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in E^2$ on a:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

On a de plus égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires (il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$).

(3) Pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on a:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \quad ; \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\| \quad ; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \quad ; \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Propriété 94: (familles orthogonales)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée.

(1) Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

(2)(Théorème de Pythagore) Soit $(u, v) \in E^2$. On a:

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(3) Si (u_1, \dots, u_n) est une famille orthogonale de E alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$$

(4) Si (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de E alors l'expression du produit scalaire et de la norme euclidienne dans cette base est la suivante pour $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad ; \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

(5)(décomposition dans une BON) Si (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormée de E alors la décomposition d'un vecteur $x \in E$ dans cette base est

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, u_i \rangle u_i$$

Propriété 95: (algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E .

Alors il existe une famille orthonormée (u_1, \dots, u_n) de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

De plus on a les relations

$$\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad w_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle u_i \quad ; \quad u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$$

Il faut savoir faire le dessin pour la construction de u_1, u_2 et u_3 à partir de e_1, e_2 et e_3 .

Propriété 96: (supplémentaire orthogonal)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

(1) On a

$$E = F \oplus F^\perp \quad ; \quad (F^\perp)^\perp = F$$

(2) Si E est de dimension finie alors on a

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$$

Propriété 97: (projection orthogonale)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

(1) Si (u_1, \dots, u_p) est une base orthonormée de F alors on a

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, u_i \rangle u_i$$

(2) Pour tout $x \in E$ on a

$$y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \quad \langle x - y, z \rangle = 0 \end{cases} \quad ; \quad p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x$$

(3) Soit (u_1, \dots, u_p) est une famille génératrice de F . Soit $x \in E$. On a alors

$$\forall y \in F, \quad y = p_F(x) \iff (\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \langle x - y, u_i \rangle = 0)$$

Propriété 98: (distance et projection orthogonale)

Soit E un espace préhilbertien réel dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et soit $x \in E$.

Alors la distance de x à F est atteinte en un unique point de F qui est $p_F(x)$.

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\| = d(x, F) \iff y = p_F(x)$$

X Déterminants

Propriété 99: (dictionnaire matrice/endomorphisme/famille)

Soit E un \mathbf{K} -espace vectoriel de dimension n et \mathcal{B} une base de E .

- (1) Si \mathcal{F} est une famille de n vecteurs de E alors $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
 (2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \det(u)$.

Propriété 100: (du déterminant matriciel)

Soit $A, B \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

(1) On a

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad ; \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad ; \quad \det(A^T) = \det(A) \quad ; \quad \forall n \in \mathbf{N}, \det(A^n) = (\det A)^n$$

$$A \in GL_n(\mathbf{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

(2) On a $A \in GL_n(\mathbf{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et on a alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad ; \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \det(A^n) = (\det A)^n$$

(2) L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}$ est n -linéaire alternée par rapport à ses colonnes (et à ses lignes) et vérifie $\det(I_n) = 1$.

Propriété 101: (propriétés de calcul)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- (1) Si les colonnes ou les lignes de A forment une famille liée alors $\det(A) = 0$.
 (2) Si B est obtenue à partir de A avec l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ avec $i \neq j$ alors $\det(B) = \det(A)$.
 (3) Si B est obtenue à partir de A avec l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(B) = -\det(A)$.
 (4) Si B est obtenue à partir de A avec l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$ alors $\det(B) = \lambda \det(A)$.

Propriété 102: (matrices triangulaires)

Le déterminant d'une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est le produit de ses coefficients diagonaux.

$$\det(T) = \prod_{i=1}^n t_{i,i}$$

Théorème 19: (développement par rapport à une ligne ou une colonne)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

(1) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\det M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{i,j}$$

(2) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{ij} \Delta_{i,j}$$

XI Probabilités

Propriété 103: (indépendance et passage au complémentaire)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'événements.

Si A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants il en est de même pour les événements B_1, \dots, B_n avec $B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$.

Propriété 104: (calculs élémentaires)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A, B deux événements. On a:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{A}) &= 1 - \mathbb{P}(A) & ; & & A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) & ; & & \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ & & & & \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

Propriété 105: (probabilités composées)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'événements avec $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Propriété 106: (probabilités totales)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ un système complet d'événements. On a

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)$$

avec la convention que $\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B) = 0$ si $\mathbb{P}(A_k) = 0$.

Propriété 107: (indépendance de variables aléatoires en pratique)

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans des ensembles E_1, \dots, E_n .

Les variables X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Propriété 108:

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans des ensembles E_1, \dots, E_n .

On suppose que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

(1) Toute sous-famille de (X_1, \dots, X_n) est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(2) Si $u_i : E_i \rightarrow F_i$ sont des applications (où F_1, \dots, F_n sont des ensembles) alors les variables aléatoires $u_1(X_1), \dots, u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

(3)(**lemme des coalitions**) Si $u : \prod_{i=1}^p E_i \rightarrow F$ et $v : \prod_{i=p+1}^n E_i \rightarrow G$ sont des applications (où F, G sont des ensembles) alors les variables aléatoires $u(X_1, \dots, X_p)$ et $v(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Propriété 109: (loi conjointe et lois marginales en pratique)

Soit (X, Y) est un couple de variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans E_1 et E_2 .

(1) La famille $((X = x) \cap (Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$$

(2) Pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y) \times \mathbb{P}_{(Y=y)}(X = x)$$

(3) On a

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \quad ; \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Théorème 20: (de transfert)

Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble E .

Soit $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

Alors l'espérance de la variable aléatoire $g(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

Propriété 110: (de l'espérance)

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoire complexes sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

(1) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On a:

$$\text{(linéarité)} \quad \begin{cases} \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(aX_1 + b) = a\mathbb{E}(X_1) + b \end{cases} \quad ; \quad \text{(inégalité triangulaire)} \quad |\mathbb{E}(X_1)| \leq \mathbb{E}(|X_1|)$$

$$\text{(positivité)} \quad X_1 \geq 0 \implies \mathbb{E}(X_1) \geq 0 \quad ; \quad \text{(croissance)} \quad X_1 \leq X_2 \implies \mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2)$$

(2) Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes on a

$$\mathbb{E}(X_1 \times \dots \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times \dots \times \mathbb{E}(X_n)$$

Propriété 111: (de la variance)

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoire réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

(1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a:

$$\mathbb{V}(aX_1 + b) = a^2\mathbb{V}(X_1) \quad ; \quad \text{(Koenig-Huygens)} \quad \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$

(2) Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes on a

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

Propriété 112: (Markov & Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

(1)(Inégalité de Markov)

Si $X \geq 0$ alors

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

(2)(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Propriété 113: (de la covariance)

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. On a

$$\text{(Koenig-Huygens)} \quad \text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1) \times \mathbb{E}(X_2) \quad ; \quad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies \text{Cov}(X_1, X_2) = 0$$

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Propriété 114: somme de variables de Bernoulli i.i.d.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Dans ce cas la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.