

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupement de termes. Expressions simplifiées de $\sum_{i=1}^n k$, $\sum_{i=1}^n k^2$, $\sum_{i=1}^n x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$. Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbf{R}$.	Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide. Exemples de sommes triangulaires Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.
Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.
Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles. Parité, imparité, périodicité. Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte). Fonctions majorées, minorées, bornées.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude. Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si f est majorée.
Dérivation	
Dérivée d'une fonction. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivées d'ordre supérieur.	Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$. Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Résultats admis à ce stade. Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle. Inégalités $\exp(x) \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$. Fonctions circulaires réciproques arcsin, arccos, arctan. Fonctions hyperboliques sinh, cosh.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbf{R}_+^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2. Dérivée, variations, représentation graphique. Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

La colle sera constituée d'un exercice "type" et d'un ou deux exercices complémentaires.
Vous pourrez être interrogés sur n'importe quel point du cours (hors démonstrations).

Exercices "type"

- Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.
Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

- Calculer $D_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

- Calculer $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

- Montrer les inégalités suivantes

$$\forall x \in \mathbf{R}, e^x \geq x+1 \quad ; \quad \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \quad ; \quad \forall x \in \mathbf{R}_+, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

- On note $\mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Justifier que $h : x \mapsto \exp(-x^2/2)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists P_n \in \mathbf{R}[X], \forall x \in \mathbf{R}, \quad h^{(n)}(x) = P_n(x) \exp(-x^2/2)$$

- Montrer que : $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos x)$