

Répondre par **Vrai** et **Faux** et justifier vos réponses (par une preuve ou par un contre exemple le cas échéant).

1. La négation de $\mathcal{P} \implies \mathcal{R}$ est $\mathcal{P} \implies \text{NON}(\mathcal{R})$.
2. Soit $f : E \rightarrow F$ et A, B, C, D sont des parties de E et X, Y des parties de F .
 - (a) On a toujours $A \times B = B \times A$.
 - (b) On a toujours $(A \cup B) \setminus B = A$. Et $(A \cup B) \cap \bar{B} = A$? et $(A \setminus B) \cup B = A$?
 - (c) On a $A \subset B \iff f(A) \subset f(B)$.
 - (d) Si $x \in E$ la notation $f(x)$ a toujours un sens.
 - (e) Si $y \in F$ la notation $f^{-1}(y)$ a toujours du sens.
 - (f) Si $y \in F$ la notation $f^{-1}(\{y\})$ a toujours du sens.
 - (g) La notation $f^{-1}(X)$ désigne un élément de E (resp. une partie de E).
 - (h) Soit $y \in F$. Si $f^{-1}(y)$ a un sens alors cette notation désigne un élément de E (resp. une partie de E).
 - (i) Si $y \in F$ et f bijective on a toujours $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$.
 - (j) $\forall x \in A, \quad x \in B \iff x \in A \cap B$
 - (k) On a $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
 - (l) On a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
 - (m) On a $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$.
 - (n) On a $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$.
 - (o) On a $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
 - (p) On a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
 - (q) On a $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
 - (r) On a $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
 - (s) Si $f(A) = X$ alors $A = f^{-1}(X)$.
 - (t) Si $A = f^{-1}(X)$ alors $f(A) = X$.
3. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.
 - (a) Si $g \circ f$ est bijective alors f et g sont bijectives.
 - (b) Si $g \circ f$ et f sont bijectives alors g est bijective.
 - (c) Si $g \circ f$ injective et f injective alors g injective.
 - (d) Si $g \circ f$ surjective et g surjective alors f surjective.
4. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x^2 \geq 1$ alors $x \geq 1$.
 - (b) Pour tout réel x on a $x \leq x^2$.
 - (c) Pour tout réel x on a $|x|^2 = x^2$.
 - (d) Pour tout réel x on a $|x|^3 = x^3$.
 - (e) Si $x \neq a$ et $y \neq b$ alors $x + y \neq a + b$.
 - (f) Soit $y > 0$. Pour tout réel x on a $(x - y)^2 \leq (x + y)^2$.
 - (g) Si $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$ alors $0 \leq x - y \leq a - b$.
 - (h) On suppose que $-2 \leq x \leq 1$ et $1 \leq y \leq 3$. On a alors $-2 \leq xy \leq 3$.
 - (i) On suppose que $-2 \leq x \leq 1$ et $1 \leq y \leq 3$. On a alors $-2 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{3}$.
 - (j) Si $x \leq y$ alors $|x| \leq |y|$.
 - (k) Pour tous réels x et y on a $|x - y| \leq |x| - |y|$.
 - (l) Pour tous réels x et y on a $|x - y| \leq |x| + |y|$.
 - (m) On a : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad 1 \leq x \leq 3 \iff 0 \leq x \leq 3$.
 - (n) Soit $x_0, \dots, x_n$ et $y_0, \dots, y_n$ des réels. On a :

$$(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_k \leq y_k) \iff \left(\sum_{k=0}^n x_k \leq \sum_{k=0}^n y_k \right)$$

5. (a) Pour tout $x \in [-1, 1[$ on a $\arctan(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$.
- (b) Pour tout réel x on a $\arccos(\cos x) = x$.
- (c) Soit $x \in \mathbf{R}$ et $a \in [-1, 1]$. Si $\cos x = a$ alors $x = \arccos(a)$.

- (d) Pour tous nombres réels x et y on a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
- (e) Pour tout réel x on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$.
6. (a) Pour tout complexe z on a $|z|^2 = z^2$.
- (b) Pour tout complexe z on a $z^2 \geq 0$.
- (c) Pour tout nombre complexe z on a $|z-1| \leq |z+1|$.
- (d) Pour tout nombre complexe z on a $|1+z| \geq 1$.
- (e) Si il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $|z|^n = |z'|^n$ alors il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $z' = e^{i\theta} z$.
- (f) Deux complexes dont la somme et le produit sont réels, sont des réels.
- (g) Un nombre complexe non réel est imaginaire pur (c'est à dire $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset i\mathbb{R}$).
7. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.
- (a) Si f croissante et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors λf est croissante.
- (b) Si f est croissante on a : $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$
- (c) Si f est strictement croissante on a : $x < y \iff f(x) < f(y)$
- (d) Si f est croissante on a : $f(x) < f(y) \implies x < y$
- (e) Si f est injective alors f est strictement monotone.
- (f) Si f ou g est constante alors $g \circ f$ est constante. Réciproque ?
- (g) Si f est paire alors f n'est pas bijective.
- (h) Si f est paire alors f n'est pas impaire.
- (i) On a toujours $f \leq g$ ou $g \leq f$.
- (j) Si f et g sont décroissante sur $D \subset \mathbf{R}$ alors $g \circ f$ est croissante sur D .
- (k) La fonction $f \circ f$ est croissante.
- (l) Si f et g sont croissantes alors fg est croissante.
- (m) Si f est paire (resp. impaire) est majorée sur $\mathbf{R}_+$ alors f est majorée sur $\mathbf{R}$.
- (n) Si f possède une période alors f est périodique.
8. Il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui n'est monotone sur aucun intervalle
9. Il existe une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ n'ayant pas de primitive.
10. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ possède une primitive alors f est continue.
11. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et F une primitive de f .
- (a) Si f est périodique alors F est périodique.
- (b) Si f est paire alors F est paire (resp. impaire).
- (c) Si f est paire et $F(0) = 0$ alors F est impaire.
- (d) Si f est impaire alors F est paire.
12. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable.
- (a) Si f est périodique alors f' est périodique.
- (b) Si f est paire alors f' est impaire.
- (c) Si f est impaire alors f' est paire.
13. Si $f[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable possède un extremum en $x_0 \in [a, b]$ alors $f'(x_0) = 0$.
14. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables et $a \in \mathbf{R}$.
- (a) Si $f \leq g$ alors $f' \leq g'$. Réciproque ?
- (b) Si $f(a) = g(a)$ et $f' \leq g'$ sur $[a, +\infty[$ alors $f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.
- (c) Si $f' = g'$ alors $f = g$. Réciproque ?
- (d) Si $f(a) = g(a)$ alors $f'(a) = g'(a)$.
- (e) On a
- $$\left(f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \implies \left(\forall x \in \mathbf{R}, f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$
- (f) On a
- $$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$$

15. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sont continues on a

$$(\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)) \iff \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

16. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est continue on a

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \implies (\forall t \in [a, b], f(t) = 0)$$

17. La suite $(e^{in\theta})_{n \in \mathbf{N}}$ est périodique si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbf{Q}$.

18. Soit (u_n) une suite réelle.

- (a) Si (u_n) réelle croissante majorée par 1 alors $u_n \rightarrow 1$.
- (b) Si $u_n \leq v_n$ pour tout n alors (u_n) est majorée.
- (c) Si $u_n - v_n \rightarrow 0$ alors $u_n \sim v_n$.
- (d) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \rightarrow 0$.
- (e) Si $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ alors (u_n) converge.
- (f) Si $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ alors (u_n) possède une limite.
- (g) Si $u_{n+1} \sim u_n$ alors (u_n) converge.
- (h) Si $u_{n+1} \sim u_n$ alors (u_n) possède une limite.
- (i) Si $u_{n+1} \sim \lambda u_n$ alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $u_n \sim \alpha \lambda^n$.
- (j) Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
- (k) Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) tend vers $+\infty$.
- (l) Si (u_n) diverge alors (u_n) n'est pas bornée.
- (m) Si (u_n) converge vers ℓ alors $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang.
- (n) Si (u_n) converge alors (u_n) est monotone à partir d'un certain rang.

19. Si la somme de deux suites converge, alors chacune de ces suites converge.

20. Si deux suites divergent, alors leur somme diverge.

21. Soit $(u_n), (v_n)$ et (a_n) des suites réelles.

- (a) Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(a_n)$ alors $u_n = v_n$.
- (b) Si $u_n \sim v_n$ et (u_n) croissante à partir d'un certain rang alors (v_n) croissante à partir d'un certain rang.
- (c) Si $u_n \sim a_n$ alors $u_n + v_n \sim a_n + v_n$.
- (d) Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
- (e) On suppose que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
Si $u_n \sim v_n$ alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.
- (f) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^n \sim v_n^n$.

22. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est définie en 0 alors f possède au moins une limite à droite ou à gauche en 0.

23. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de 0.

- (a) Si g et $f + g$ ont des limites en 0 alors f a une limite en 0.
- (b) Si g et $f + g$ ont des limites finies en 0 alors f a une limite en 0.
- (c) Si f et g ont des limites en 0 alors $f + g$ a une limite en 0.
- (d) Si f et g n'ont pas de limite en 0 alors $f + g$ n'a pas de limite en 0.
- (e) Si f a une limite finie en 0 alors f est bornée.
- (f) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ alors $f(x) \sim g(x)$.

24. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue.

- (a) Il existe un voisinage de 0 sur lequel f est monotone.
- (b) Il existe un voisinage de 0 où f ne s'annule qu'un nombre fini de fois.
- (c) Si $f(0) \neq 0$ il existe un voisinage de 0 où f ne s'annule pas.
- (d) Toute primitive de f est du type $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ avec a bien choisi.

(e) Toute primitive de f qui s'annule au moins une fois est du type $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ avec a bien choisi.

25. On a $xe^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.

26. Il existe une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui est continue en un unique point.

27. Il existe une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ qui n'est continue en aucun point.

28. Il existe une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

29. Si f est continue en 0 alors f est dérivable en 0.

30. Si f est continue en 0 alors elle est au moins dérivable à droite ou à gauche en 0.

31. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable alors f' est continue sur $\mathbf{R}$.

32. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ (au moins) et que f' possède une limite finie en 0 alors f est dérivable en 0.

33. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue sur $\mathbf{R}$, dérivable sur $\mathbf{R}^*$ (au moins), et que f' ne possède pas de limite en 0 alors f n'est pas dérivable en 0.

34. Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dérivable et que $f'(0) > 0$ alors il existe un voisinage de 0 où f est croissante.

35. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ dérivable.

(a) Si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors f bornée au voisinage de $+\infty$.

(b) Si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que f bornée au voisinage de $+\infty$ alors f possède une limite finie en $+\infty$.

(c) Si f est bornée alors f' est bornée.

(d) Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbf{R}$ alors f' possède une limite en $+\infty$.

(e) Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbf{R}$ alors f' bornée au voisinage de $+\infty$.

(f) Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbf{R}$ et que f' possède une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

RÉPONSES

1. **FAUX** si $\mathcal{P}$ est fausse les deux implications sont vraies.
La négation de $\mathcal{P} \implies \mathcal{R}$ est $(\text{NON}(\mathcal{P})) \text{ OU } \mathcal{R}$, alors que $\mathcal{P} \implies \text{NON}(\mathcal{R})$ signifie $\text{NON}(\mathcal{P}) \text{ OU } (\text{NON}(\mathcal{R}))$.
2. (a) **FAUX** pour $A = \mathbf{R}_-$ et $B = \mathbf{R}_+$ dans $E = \mathbf{R}$: on a $(-1, 2) \in A \times B$ mais $(-1, 2) \notin B \times A$.
De manière générale, si $E \neq F$ l'égalité est fausse car l'ordre est important dans le couple.
- (b) **FAUX** et **FAUX** et **FAUX**. On remarque que les deux premières assertions sont identiques.
 On peut prendre $A = B \neq \emptyset$ pour les deux premières assertions, et $B = \bar{A} \neq \emptyset$ pour la dernière.
 Plus généralement : prendre A, B tels que $B \not\subset A$ et $A \not\subset B$ et $A \cap B \neq \emptyset$.
Par contre on a toujours (en développant) : $(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \bar{B} = A \cap \bar{B}$ et $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup B = A \cup B$.
- (c) **FAUX** car l'implication ($\Leftarrow$) est fausse pour $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et $A =]-\infty, -1]$ et $B = \mathbf{R}_+$.
- (d) **VRAI** c'est par définition l'image de x par f .
- (e) **FAUX** seulement si f bijective, et cela désigne alors l'unique antécédent de y par f .
- (f) **VRAI** c'est par définition l'image réciproque de la partie $X = \{y\}$ par f , c'est à dire

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E \mid f(x) = y\}$$
- (g) **FAUX** puis **VRAI** la notation $f^{-1}(X) = \{x \in E \mid f(x) \in X\}$ désigne une partie de E (et pas un élément de E).
- (h) **VRAI** puis **FAUX** si la notation $f^{-1}(y)$ a un sens c'est que f est bijective et cette notation désigne alors l'unique antécédent de y par f , qui est un élément de E (et pas une partie de E).
- (i) **FAUX** comme expliqué ci-dessus $f^{-1}(y)$ désigne un élément de E alors que $f^{-1}(\{y\})$ désigne une partie de E .
 Si x_0 est l'unique antécédent de y par f on a alors $f^{-1}(y) = x_0$ et $f^{-1}(\{y\}) = \{x_0\}$.
- (j) **VRAI** par double implication.
- (k) **FAUX** prendre $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$ et $C = [-1, 1]$. D'où l'importance de préciser les parenthèses quand on écrit $A \cap B \cup C \dots$.
- (l) **FAUX** prendre $A = [0, 2]$ et $B = [1, 3]$ et $C = [-1, 1]$.
- (m) **VRAI** en développant soigneusement en débutant par $(A \cup B) \cap (C \cup D) = ((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cup B) \cap D) = \dots$.
- (n) **VRAI** en développant soigneusement en débutant par $(A \cap B) \cup (C \cap D) = ((A \cap B) \cup C) \cap ((A \cap B) \cup D) = \dots$.
- (o) **VRAI** par double inclusion (cf. exos $TD_f(3)$).
- (p) **FAUX** prendre $E = F = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$ et $A = \mathbf{R}_+$ et $B = \mathbf{R}_-$ (cf. exos $TD_f(3)$).
- (q) **VRAI** par double inclusion (cf. exos $TD_f(3)$).
- (r) **VRAI** par double inclusion (cf. exos $TD_f(3)$).
- (s) **FAUX** prendre $E = F = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$ et $A = \mathbf{R}_+$ avec $X = \mathbf{R}_+$. On trouve $f^{-1}(X) = \mathbf{R} \neq A$.
 Si $f(A) = X$ on a a priori seulement $A \subset f^{-1}(X)$.
- (t) **FAUX** prendre $E = F = \mathbf{R}$ et $f(x) = x^2$ et $X = [-1, +\infty[$ avec $A = \mathbf{R}$. On trouve $f(A) = \mathbf{R}_+ \neq X$.
 Si $A = f^{-1}(X)$ on a a priori seulement $f(A) \subset X$. Si $X \subset f(E)$ le résultat est vrai car $f(A) = X \cap f(E)$ (cf. $TD_f(3)$).
3. (a) **FAUX** avec $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ et $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.
- (b) **VRAI** par composée de fonctions bijectives car $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$.
- (c) **FAUX** avec $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ et $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.
- (d) **FAUX** avec $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ et $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.
4. (a) **FAUX** pour $x = -2$.
- (b) **FAUX** pour $x \in]0, 1[$.
- (c) **VRAI** par disjonction des cas ($x \geq 0$ ou $x < 0$).
- (d) **FAUX** pour $x = -1$.
- (e) **FAUX** pour $(x, y) = (1, 3)$ et $(a, b) = (-2, 6)$.

- (f) **FAUX** pour $x = -y$ (et même tout $x < 0$: regarder le signe de la différence pour répondre).
- (g) **FAUX** en prenant $x = 0$ et $y = b$ (dans le cas $b \leq a$, sinon c'est immédiat).
- (h) **FAUX** avec $x = -2$ et $y = 3$.
Il faut vérifier que les bornes sont toutes positives pour appliquer cet argument.
- (i) **FAUX** avec $x = 1$ et $y = 1$.
Il faut vérifier que les bornes sont toutes positives pour appliquer cet argument et encadrer d'abord $1/y$.
- (j) **FAUX** pour $x = -2$ et $y = -1$.
- (k) **FAUX** pour $x = 1$ et $y = -2$.
- (l) **VRAI** avec inégalité triangulaire $|x + (-y)| \leq |x| + |-y|$.
- (m) **FAUX** car $(\Leftarrow)$ fausse pour $x = 0$ (et même tout $x \in [0, 1]$).
- (n) **FAUX** car $(\Leftarrow)$ fausse pour $(x_0, x_1) = (1, 3)$ et $(y_0, y_1) = (4, 1)$ et $x_k = y_k$ pour les suivants.
Le sens $(\Rightarrow)$ est toujours vrai.
5. (a) **FAUX** pour $x = -1$ (et pour toutes les valeurs de $[-1, 1[$ à l'exception de deux valeurs dont 0).
- (b) **FAUX** pour $x = 2\pi$ (et pour toute valeur n'appartenant pas à $[0, \pi]$).
- (c) **FAUX** pour $a = 1$ et $x = 2\pi$ (et pour toute valeur vérifiant $\cos x = a$ mais n'appartenant pas à $[0, \pi]$).
- (d) **FAUX** pour $x = y = 0.5$ (et tout couple vérifiant $\{x\} + \{y\} \geq 1$ où $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$).
- (e) **FAUX** pour $x = 3.1$ (et toute valeur non entière).
6. (a) **FAUX** pour $z = i$. En général $z^2 \notin \mathbf{R}$ alors qu'on sait qu'on a toujours $|z| \in \mathbf{R}_+$...
- (b) **FAUX** pour $z = i$. Même remarque que précédemment.
- (c) **FAUX** pour $z = -1$ (et pour tout nombre complexe de $\mathbf{C} \setminus \{i\mathbf{R}\}$).
- (d) **FAUX** pour $z = -1$ (et tout nombre complexe dont le point associé n'est pas dans le disque ouvert centré en Ω d'affixe -1 et de rayon 1).
- (e) **VRAI** en passant par l'écriture exponentielle.
 Si $z' = 0$ on a $z = 0$ et c'est vrai avec θ quelconque. Si $z' \neq 0$ on a $z \neq 0$ aussi et on écrit $z = re^{i\alpha}$ et $z' = r'e^{i\alpha'}$.
 L'hypothèse donne $r^n = r'^n$ donc $r = r'$ (injectivité de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbf{R}_+^*$ car $n \neq 0$) puis on pose $\theta = \alpha' - \alpha$.
- (f) **FAUX** pour $z_1 = i$ et $z_2 = -i$ (et plus généralement pour les couples $(z, \bar{z})$ avec $z \notin \mathbf{R}$).
- (g) **FAUX** pour $z = 1 + i$ (et plus généralement pour tout nombre complexe de parties réelles et imaginaires non nulles).
7. (a) **FAUX** pour $\lambda < 0$ (dans ce cas λf est décroissante).
- (b) **FAUX** le sens $(\Leftarrow)$ n'est pas vérifié pour f la fonction nulle avec $x = 1$ et $y = 0$.
Le sens $(\Rightarrow)$ est toujours vrai (c'est la définition).
- (c) **VRAI** le sens $(\Rightarrow)$ correspond à la définition, et on montre le sens $(\Leftarrow)$ par contraposée.
- (d) **VRAI** par contraposée.
- (e) **FAUX** pour $f(x) = x$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \in [0, 1]$.
- (f) **VRAI** puis **FAUX** pour réciproque.
 Si $f(x) = a$ pour tout x alors $g(f(x)) = g(a)$ pour tout x , et si $g(y) = a$ pour tout y alors $g(f(x)) = a$ pour tout x .
 On pose $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ et $f(x) = |\cos x|$: dans ce cas $g \circ f$ est l'application nulle alors que f et g sont toutes les deux non constantes
- (g) **VRAI** car f n'est jamais injective (on a par exemple $f(-1) = f(1)$).
- (h) **FAUX** la fonction nulle est paire et impaire (c'est la seule : exercice !).
- (i) **FAUX** avec $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$. On rappelle que $f \leq g$ signifie "pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a $f(x) \leq g(x)$ ".
- (j) **FAUX** avec $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$ pour $D = \mathbf{R}_-$. On trouve $(g \circ f)(x) = x^2$ donc $g \circ f$ décroissante sur D .
Pour appliquer les règles de composition il faut examiner les variations de f sur D et de g sur $f(D)$.
- (k) **FAUX** avec $f(x) = x^2$ qui donne $(f \circ f)(x) = x^4$ qui est décroissante sur $\mathbf{R}_-$.
- (l) **FAUX** avec $f(x) = x$ et $g(x) = x - 1$.
Résultat vrai si on a de plus $f \geq 0$ et $g \geq 0$ (exercice).

- (m) **VRAI** si f paire et **FAUX** si f impaire.
Si f paire et $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ alors : pour tout $x \in \mathbf{R}_-$ on a $f(x) = f(-x) \leq M$.
La fonction $f = -\text{id}_{\mathbf{R}}$ est impaire, majorée sur $\mathbf{R}_+$, mais pas majorée sur $\mathbf{R}$.
- (n) **FAUX** pour $f(x) = x^2$ et $T = 0$.
Toute fonction admet pour période $T = 0$.
8. **VRAI** prendre $f = \mathbf{1}_{\mathbf{Q}}$ (fonction caractéristique des rationnels).
9. **VRAI** prendre $f = \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ (fonction caractéristique de $\mathbf{R}_+$).
Par l'absurde : si F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$ alors $F(x) = c_1$ sur $\mathbf{R}_-$ et $F(x) = x + c_2$ sur $\mathbf{R}_+$ (cours). Comme F est continue en 0 on a $F(0) = c_1 = c_2$. Comme F dérivable en 0 les dérivées à droites et à gauche sont égales, ce qui donne $0 = 1$: contradiction.
10. **FAUX** prendre $f(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
On a $F' = f$ avec $F(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$, mais f n'est pas continue en 0 (classique).
Plus généralement : si g n'est pas $\mathcal{C}^1$ alors la fonction $f = g'$ possède une primitive (par exemple g) mais n'est pas continue.
11. (a) **FAUX** pour $f(x) = |\sin x|$.
Par l'absurde : si F est une primitive T -périodique de f (avec $T > 0$) on a $F' = f \geq 0$ et F' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial donc F est strictement croissante, donc injective, ce qui contredit $F(T) = F(0)$.
En écrivant $F(x) = \int_0^x f(t)dt + c$ on constate que $F(x+T) = F(x)$ équivaut à $\int_0^T f(t)dt = 0$. On cherche donc une fonction périodique dont l'intégrale sur une période est non nulle.
- (b) **FAUX** puis **FAUX** avec $f(x) = \cos x$ et $F(x) = \sin x + 1$ où F n'est ni paire ni impaire (cf $TD_r(2)$).
- (c) **VRAI** dans ce cas on a $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (cours) et $u = -t$ donne $F(-x) = -F(x)$ (cf. $TD_r(2)$).
- (d) **VRAI** en écrivant $F(x) = \int_0^x f(t)dt + c$ (cours) et $u = -t$ donne $F(-x) = F(x)$ (cf. $TD_r(2)$).
12. (a) **VRAI** si f est T -périodique on pose $u(x) = f(x+T) - f(x)$ qui est la fonction nulle et donc $u' = 0$.
On trouve f' de même période que f .
- (b) **VRAI** en posant $u(x) = f(-x) - f(x)$ comme ci-dessus.
- (c) **VRAI** en posant $u(x) = f(-x) + f(x)$ comme ci-dessus.
13. **FAUX** pour $f(x) = x$ sur $[0, 1]$ avec $x_0 = 0$ (ou $x_0 = 1$).
Le résultat est vrai si $x_0 \in]a, b[$.
14. (a) **FAUX** avec $f(x) = -e^{-x}$ et $g = 0$, puis **FAUX** pour réciproque avec $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$.
La première question équivaut à savoir si $f \leq 0$ implique $f' \leq 0$ ce qui est manifestement faux.
- (b) **VRAI** Si $x \geq a$ par conservation de l'ordre par l'intégrale on a
- $$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \leq \int_a^x g'(t)dt = g(x) - g(a)$$
- (c) **FAUX** avec $g(x) = f(x) + 1$ puis **VRAI** pour la réciproque (heureusement).
- (d) **FAUX** avec $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$ et $a = 0$.
- (e) **FAUX** avec $f(x) = x^2$ et $a = 0$.
Cette implication n'est vraie que pour les fonctions affines.
- (f) **VRAI** on passe à la limite (légitimée par l'existence de celle du terme de gauche comme f dérivable en 0) dans
- $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} = \frac{f(x) - f(-x)}{x}$$
15. **FAUX** le sens ($\Leftarrow$) n'est pas vérifiée pour $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0, 2]$.
Le sens ($\Rightarrow$) est toujours vrai.
16. **FAUX** pour $f(x) = x$ sur $[-1, 1]$.
Il faut ajouter l'hypothèse " f de signe constant" pour que l'implication soit vraie.
Toute fonction impaire aura une intégrale nulle sur $[-b, b]$.

17. **VRAI**.

Si la suite est périodique il existe $\ell \in \mathbf{N}^*$ tel que $e^{i\ell\theta} = e^{i0\theta} = 1$ donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\ell\theta = 2k\pi$ et donc $\theta = 2\pi r$ avec $r = k/\ell \in \mathbf{Q}$.

La réciproque est immédiate : si $\theta = 2\pi p/q$ alors $e^{i(n+q)\theta} = e^{in\theta} \times e^{i2\pi p} = e^{in\theta}$ donc la suite est q -périodique.

On peut démontrer que si $\theta \notin 2\pi\mathbf{Q}$ alors la suite est dense sur le cercle !

18. (a) **FAUX** si $a \in [0, 1[$ la suite $u_n = a - \frac{1}{n}$ est majorée par 1 mais converge vers $a < 1$.

Pour trouver la limite il faut trouver le "meilleur" majorant c'est à dire la borne sup.

(b) **FAUX** avec $u_n = n$ et $v_n = n^2$ on a $u_n \leq v_n$ or (u_n) n'est pas majorée.

Dans la définition de majorée le majorant est indépendant de n .

(c) **FAUX** avec $u_n = 1/n$ et $v_n = 1/n^2$.(d) **FAUX** avec $u_n = n$ et $v_n = n + 1$.(e) **FAUX** avec $u_n = \ln(n)$.

La réciproque est vraie.

(f) **FAUX** avec $u_n = \sin(\sqrt{n})$.

On a une suite sans limite (considérer les sous suites avec $\varphi_1(n) = (n\pi)^2$ et $\varphi_2(n) = ((4n+1)\pi/2)^2$).

On montre que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 en appliquant le TAF à $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ sur $[n, n+1]$.

(g) **FAUX** avec $u_n = n$.(h) **FAUX** avec $u_n = 2 + \sin(\sqrt{n})$.

Cette suite sans limite (cf. ci-dessus) vérifie $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (avec TAF à $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ sur $[n, n+1]$ comme ci-dessus).

Il suffit alors de vérifier que $\frac{1}{2\sqrt{n}} = o(u_n)$ (calcul élémentaire avec $2 + \sin(\sqrt{n}) \geq 1$), ce qui donne bien $u_{n+1} \sim u_n$.

(i) **FAUX** pour $u_n = n \times \lambda^n$ avec $\lambda > 0$.

Si $u_n \sim \alpha \lambda^n$ on aurait $n = \frac{u_n}{\lambda^n} \rightarrow \alpha \in \mathbf{R}$ ce qui est impossible.

(j) **FAUX** avec $u_n = n + (-1)^n$.(k) **FAUX** avec $u_n = n \times (-1)^n$.(l) **FAUX** avec $u_n = (-1)^n$.(m) **FAUX** avec $u_n = 1/n$ qui converge vers 0.(n) **FAUX** avec $u_n = (-1)^n/n$.19. **FAUX** avec $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n} - (-1)^n$.20. **FAUX** avec $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n} - (-1)^n$.21. (a) **FAUX** avec $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = n^2 + n$ et $a_n = n^2$.(b) **FAUX** avec $u_n = n$ et $v_n = n + (-1)^n$.(c) **FAUX** avec $u_n = n^2 + 1$ et $a_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$.(d) **FAUX** avec $u_n = n$ et $v_n = n + 1$.(e) **FAUX** avec $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.(f) **FAUX** avec $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ on a $u_n^n \sim e^{-1}$ et $v_n^n \sim e$ (exercice).22. **FAUX** avec $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.23. (a) **FAUX** avec $g(x) = 1/x^2$ et $f(x) = \sin(1/x)$.

On a bien $f(x) + g(x) \geq g(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} +\infty$.

(b) **VRAI** par opérations sur limites finies avec $f = (f+g) - g$.(c) **FAUX** avec $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.(d) **FAUX** avec $f(x) = \sin(1/x)$ et $g(x) = x - \sin(1/x)$.(e) **FAUX** pour $f(x) = x$.

Une limite finie en a garantit uniquement le caractère borné localement au voisinage de a .

(f) **FAUX** avec $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

Le résultat est vrai si la limite est finie non nulle.

24. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue.

- (a) **FAUX** pour $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
- (b) **FAUX** pour $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
- (c) **VRAI** en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = |f(0)|/2 > 0$ on montre qu'il existe un voisinage $[-\alpha, \alpha]$ sur lequel f est du signe de $f(0)$ (exercice).
- (d) **FAUX** avec $f(x) = \exp(x)$ et $F(x) = \exp(x)$.
Si F était de la forme indiquée on aurait $F(a) = 0$ or $\exp(a) > 0$.

Toute primitive de f est cependant de la forme $F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $c \in \mathbf{R}$ constante.

- (e) **VRAI** si F primitive de f qui s'annule en a alors elle est unique et donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (cours).

25. **FAUX**

26. **VRAI** avec $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{Q}$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ qui n'est continue qu'en $x = 1/2$ (cf. exercices chapitre continuité).

27. **VRAI** avec $f = \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ (fonction caractéristique des rationnels, cf. exercices chapitre continuité).

28. **VRAI** avec $f(x) = 1/q$ si $x = p/q \in \mathbf{Q}^*$ (fraction irréductible) et $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1] \setminus \mathbf{Q}$ (cf. exercices chapitre continuité).

On peut démontrer (https://les-mathematiques.net/serveur_exos/exercices/153/2665/) qu'il n'existe aucune fonction continue sur $\mathbf{Q}$ et discontinue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

29. **FAUX** avec $f(x) = |x|$.

30. **FAUX** avec $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

31. **FAUX** avec $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ dont la dérivée n'a pas de limite en 0 (cf. cours dérivation).

32. **FAUX** avec $f(x) = \sin(x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

La fonction f n'est pas continue en 0 donc pas dérivable, et f' (qui n'est définie que sur $\mathbf{R}^*$) possède une limite finie en 0 (calcul).

Le théorème de limite de la dérivée nécessite l'hypothèse supplémentaire que f soit continue sur $\mathbf{R}$.

33. **FAUX** pour $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (cf. cours dérivation).

34. **FAUX** pour $f(x) = x^2 \sin(1/x) + x/2$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

On a $f'(0) = 1/2$ et $f'(u_n) < 0$ pour $u_n = 1/(2n\pi) \rightarrow 0$ donc il n'existe pas d'intervalle I en 0 où $f' \geq 0$ (ce qui est une condition nécessaire pour que f soit croissante sur I).

Si f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(0) > 0$ alors le résultat est cependant vrai.

- (a) **FAUX** pour $f(x) = \ln(x)$.

- (b) **FAUX** pour $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

- (c) **FAUX** pour $f(x) = \sin(x^2)$.

On a $f'(\sqrt{2n\pi}) = 2\sqrt{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc f' n'est pas bornée (par l'absurde).

- (d) **FAUX** pour $f(x) = \ell + \frac{\sin(x^2)}{x}$.

- (e) **FAUX** pour $f(x) = \ell + \frac{\sin(x^3)}{x}$.

- (f) **VRAI** en utilisant le TAF à f sur $[x, x+1]$, la composition de limite et l'unicité de la limite.