

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces vectoriels	
Structure de \mathbf{K} -espace vectoriel. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	Espaces \mathbf{K}^n , $\mathbf{K}[X]$, $M_{n,p}(\mathbf{K})$. Espace \mathbf{K}^Ω , cas particulier $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de \mathbf{R}^3 . Sous-espace $\mathbf{K}_n[X]$ de $\mathbf{K}[X]$. Notation $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.
Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice. Famille libre, liée. Bases, coordonnées	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Bases canoniques de \mathbf{K}^n , $M_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbf{K}_n[X]$.
Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.
Généralités sur les applications linéaires	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im}u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F Bilinéarité de la composition Notation $\text{Im}u$. Notation $\text{Ker}u$. Caractérisation de l'injectivité.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- Caractérisation d'un sous-espace vectoriel d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E .
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ montrer que $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
- Définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille (u_1, \dots, u_n) de vecteurs d'un \mathbf{K} -espace vectoriel E .
Montrer que (f_0, f_1, f_2) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ où $f_0 : x \mapsto x$, $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$.
- Définition de $F + G$ si F, G sont des sous-espace vectoriels de E . Définition de $E \oplus F$.
Caractérisation avec l'intersection.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$.
- Définition des coordonnées d'un vecteur dans une base de E .
Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbf{R}^3 où $u_1 = (0, 1, 1)$; $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$.
Déterminer les coordonnées de $u = (1, 2, -1)$ dans la base \mathcal{B} .
- Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ on considère l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ défini par $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$.
On suppose que $x_0 \in E$ non nul et que $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifient la relation $u(x_0) = \lambda x_0$ et que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer qu'alors λ est une racine de P .
- Soit E, F deux \mathbf{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, \dots, e_n) une famille finie de $n \geq 1$ vecteurs de E .
On a alors

$$u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$
- Soit E, F deux \mathbf{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si u est surjective alors l'image par u de toute famille génératrice de E est génératrice de F .
- Soit E, F deux \mathbf{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si u est injective alors l'image par u de toute famille libre de E est une famille libre de F .
- Caractérisation des projecteurs (sans démonstration). Décomposition en somme directe associée (démonstration).
- Caractérisation des symétries (sans démonstration). Décomposition en somme directe associée (démonstration).