Contenus	Capacités & commentaires
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point inté- rieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle.	
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométriques et cinématiques.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\|f'\|$ est majorée par K , alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles
Généralités sur les applications linéaires	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F Bilinéarité de la composition
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Im}u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Ker}u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}u = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp, \sin, \cos, \sinh, \cosh, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\arctan, x \mapsto 1/(1-x)$. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- Énoncé du théorème de Rolle et démonstration du théorème des accroissements finis.
- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ on considère l'endomorphisme $P(u) \in \mathscr{L}(E)$ défini par $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$.
  On suppose que $x_0 \in E$ <u>non nul</u> et que $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifient la relation $u(x_0) = \lambda x_0$ et que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Montrer qu'alors λ est une racine de P.
- Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espace vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
  Montrer que l'application u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.
- Montrer que $f : [-1,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \arcsin(1-x^4)$ est dérivable en 0.
- On suppose $\lambda \neq \mu$ deux éléments de $\mathbf{K}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
  On suppose que $(u - \lambda Id) \circ (u - \mu Id) = 0$.
  Montrer que
  $$\mathrm{Ker}(u - \lambda Id) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu Id) = E$$
- Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1/(1+\mathrm{e}^x)$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
  En utilisant un $DL_3(0)$ déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et donner la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente au voisinage de 0.