CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Existence de bases en dimension finie	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $[\![1,n]\!]$, alors il existe une partie J de $[\![1,n]\!]$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $(n+1)$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs. Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
Sous-espaces et dimension finie	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	
Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i)=f_i$. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E=E_1\oplus E_2$, si $u_1\in\mathscr{L}(E_1,F), u_2\in\mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $n=\dim(\mathrm{Ker} u)+\mathrm{rg}(u)$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
É quations linéaires	
Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $a \in F$. L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0 + \mathrm{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d ?ordres 1 et 2, les suites arithmético-géométriques.
Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Forme linéaire Hyperplan Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. É quations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Exemple : matrice d ?une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.	Cas particulier des endomorphismes.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seule- ment si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbf{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n. Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^n$. Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice tri- angulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
Changement de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- Soit E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
  Si S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.
  Application à la preuve du théorème du rang.
- Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ définie par $f(u_1) = u_1 - u_2$, $f(u_2) = u_2 + u_3$ et $f(u_3) = u_1 + u_3$.
  Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
- Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.
- Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul vérifiant $f^2 = 0$.
  Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, déterminer la dimension de $\text{Ker}(f)$ puis montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est
  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- On suppose que E est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et que $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice p.
  Montrer que $p \leqslant n$.