CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. Produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$.	Notations $\langle x,y\rangle,(x\|y),x\dot{y}$. Expression $X^\top Y$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbf{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\\|x+y\\|^2=\\|x\\|^2+\\|y\\|^2+2\langle x\ \|\rangle$.	Exemples : sommes finies, intégrales. Formule de polarisation associée.
Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F . Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F. Distance d'un vecteur à F . Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. Notation $d(x,F)$

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- $\varphi(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'ensemble des applications continues et 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$.
  Montrer que $(g_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une famille orthonormée où $g_k(x) = \sin(kx)$.
- $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.
  Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbf{R}_2[X]$ pour cette structure euclidienne.
- Soit E euclidien avec $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire et $\|\ .\ \|$ la norme associée. Soit p un projecteur de E.
  Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\langle p(x),y\rangle = \langle x,p(y)\rangle$ pour tout $(x,y)\in E^2$.
- Soit φ une forme linéaire sur E euclidien dont on note $(|)$ le produit scalaire.
  Montrer qu'il existe un unique vecteur $a\in E$ tel que

$$\forall x\in E\ , \qquad \varphi(x) = (a\mid x)$$

- Soit E et F deux espaces vectoriels et $u\in\mathscr{L}(E,F)$.
  Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$.
  Application à la preuve du théorème du rang.
- Soit $\mathscr{B} = (u_1,u_2,u_3)$ une base de $\mathbf{R}^3$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$ définie par $f(u_1) = u_1-u_2$, $f(u_2) = u_2+u_3$ et $f(u_3) = u_1+u_3$.
  Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
- On suppose que E est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension $n\geqslant 2$ et que $u\in\mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice p.
  Montrer que $p\leqslant n$.