

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<p>Variabes aléatoires indépendantes</p> <p>Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.</p> <p>Extension aux n-uplets de variables aléatoires.</p> <p>Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.</p> <p>Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Lemme des coalitions : si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.</p>	<p>Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.</p> <p>Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.</p> <p>Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.</p> <p>La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.</p>
<p>Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe</p> <p>Espérance $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ d'une variable aléatoire X.</p> <p>Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.</p> <p>Formule de transfert : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$.</p> <p>Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.</p>	<p>L'espérance est un X indicateur de position. Formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.</p> <p>Exemple : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.</p> <p>On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.</p> <p>Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.</p>
<p>Variance d'une variable aléatoire réelle, écart-type et covariance</p> <p>Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.</p> <p>Relation $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.</p> <p>Relation $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.</p> <p>Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.</p> <p>Covariance de deux variables aléatoires.</p> <p>Relation $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.</p> <p>Variance d'une somme, cas de variables décorréliées.</p>	<p>Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.</p> <p>Si $\sigma(X) > 0$, la variable $(X - \mathbb{E}(X))/\sigma(X)$ est centrée réduite.</p> <p>Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorréliées.</p> <p>On retrouve la variance d'une variable binomiale.</p>
<p>Inégalités probabilistes</p> <p>Inégalité de Markov.</p> <p>Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.</p>	<p>Application à l'obtention d'inégalités de concentration.</p> <p>Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.</p>

La colle sera constituée d'un des exercices "type" ci-dessous suivi éventuellement de différentes questions de cours, puis d'un ou deux exercices complémentaires.

Exercices "type"

- On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires finies mutuellement indépendantes et de même loi de moyenne μ et de variance σ^2 et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Déterminer l'espérance et la variance de M_n en fonction de n , de μ et de σ^2 .

Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mu| < \varepsilon) = 1$$

- Soit $n \geq 2$ un entier. On dispose de n urnes numérotés de 1 à n . Dans l'urne k il y a k boules numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on pioche dans celle-ci une boule au hasard. On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X , la loi de (X, Y) puis la loi de Y .
- On considère une suite infinie de tirages à pile ou face mutuellement indépendants. A chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Soit S_n la variable aléatoire indiquant le nombre de piles obtenus au cours des n premiers tirages et soit T_n la variable aléatoire définie par $T_n = \exp\left(\frac{S_n}{n}\right)$. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T_n)$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = e^p$.
- Dans cet exercice N est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. On dispose d'une urne contenant N boules : k boules rouges et $N - k$ boules blanches. Une épreuve aléatoire consiste à effectuer indéfiniment des tirages d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée, dans cette urne. On note B_j l'événement "obtenir une blanche au j -ième tirage", A_j l'événement "on obtient au moins une boule blanche lors des j premiers tirages" et A l'événement "on obtient au moins une boule blanche lors de cette expérience". Calculer $\mathbb{P}(A)$.