SUJET : ALGÈBRE 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.

1. Déterminer le déterminant de $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par $u(M) = M^\top$.
2. Dans cette question on munit E de sa norme euclidienne canonique définie par $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^\top M)}$ et on note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n.
   Soit $M \in E$. Déterminer
   $$d(M, \mathscr{S}_n(\mathbf{R})) = \inf_{S \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})} \|M - S\|$$

SUJET : ANALYSE 1

Soit S un segment de $\mathbf{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de S à valeurs dans S telle que :

$$\forall x \in S, \quad 0 < |f'(x)| < 1$$

1. Montrer que f est K-lipschitzienne avec $K \in]0,1[$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe α dans S.
   On utilisera une suite du type $v_{n+1} = f(v_n)$ et la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$.

SUJET : ANALYSE 2

Déterminer la limite en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ de

$$f(x) = (\sin(x))^{\frac{1}{\cos(x)}}$$

SUJET : ANALYSE 3

Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}}$$

SUJET : ANALYSE 4

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, strictement positive sur $[0,1]$ et vérifiant, pour tout réel $x > 0$;

$$\int_0^x f(t)^2 dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$$

On pose $F : x \longmapsto \int\limits_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et y vérifie une équation différentielle.
2. Trouver f.

SUJET : ALGÈBRE 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si p est un projecteur alors $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^m = id_E$. Montrer que $p = \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^k$ est un projecteur.
3. Montrer que $\dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{tr}\left(u^k\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(u - id_E\right)\right)$.

SUJET : ALGÈBRE 3

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A^{\mathsf{T}}A = I_n$.

1. On note $A = [C_1 \mid \cdots \mid C_n]$ la présentation en colonnes de A.
   Montrer que $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$ puis que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right| \leqslant n^2$.
3. Montrer qu'en fait on a $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{n}$.
4. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

SUJET : ANALYSE 5

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,\pi],\mathbf{R})$ décroissante. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on note

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\cos^2(nt)} \qquad ; \qquad J_n = \int_0^{\pi} \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}dt$$

1. Montrer que $I_n = I_1$ pour tout n et calculer cette valeur.
2. Montrer que (J_n) converge et déterminer sa limite.

SUJET : ANALYSE 6

On pose $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}$.
Nature de (u_n), de $\sum(-1)^n u_n$, de $\sum u_n^2$, de $\sum \ln(u_{n+1}/u_n)$ puis de $\sum u_n$.

SUJET : ANALYSE 7

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ concave et de limite nulle. Pour les réels x en lesquels l'expression a un sens on pose

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'(nx)$$

Étude et limite de f'. Existence de g et équivalent en 0.

SUJET : ALGÈBRE 4

Soit E, F, G des $\mathbf{C}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que

$$v \circ u \text{ isomorphisme} \iff \begin{cases} v \text{ surjective} \\ u \text{ injective} \\ \mathrm{Im}\,u \oplus \mathrm{Ker}\,v = F \end{cases}$$

Que dire si E, F et G sont de dimension infinie ?

SUJET : ANALYSE 8

On suppose que $a_n \sim \alpha \ln n$ avec $\alpha > 0$. Nature de $\sum \mathrm{e}^{-a_n}$.

SUJET : ALGÈBRE 5

Déterminer les sev de $\mathbf{K}[X]$ stables par $P \to D(P) = P'$.
On pourra remarquer que la restriction à $\mathbf{K}_n[X]$ de D est nilpotent.