CORRECTION
CCMP Mathématiques 1
PC et PSI

En cas de questions ou erreurs, merci de me contacter à l'adresse martin.duffaud@ens-lyon.fr.

Partie 1. Polynômes réciproques.

1 ▷ On remarque que si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors

$$\tilde{P}(X) := X^n P(\frac{1}{X}) = X^n \sum_{k=0}^{n} a_k X^{-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$$

Par linéarité de la somme.
P est réciproque si et seulement si les polynômes $\tilde{P}$ et P coïncident, *id est* si leurs coefficients sont égaux. Ce qui est équivalent à dire que $a_k = a_{n-k}$ pour $k \in \{0, ..., n\}$.

2 ▷ On a $\tilde{P}(X) = a_p \prod_{k=0}^{n} (1 - \lambda_k X)^{mk}$.

Si P est réciproque et $\lambda_j = 0$ (par l'absurde), alors $0 = P(0) = \tilde{P}(0) = a_p \prod_{k=0}^{n} (1 - \lambda_k \lambda_j)^{mk} = a_p$.

Ce qui est absurde puisque le coefficient dominant d'un polynôme non nul est non nul (et ici $d \geq 1$).
Donc ces racines sont non nuls et on remarque que pour tout j :

$$0 = P(\lambda_j) = \tilde{P}(\lambda_j) = a_p \prod_{k=0}^{n} (1 - \lambda_k \lambda_j)^{mk}$$

Comme a_p est non nul et que l'on travaille dans un corps intègre, on a $\lambda_{k_j} \lambda_j = 1$ pour ou certain k_j, ce qui fournit qu'une des racines de P est $\frac{1}{\lambda_j}$.
Pour la multiplicité, si par exemple on avait $m_j > m_{k_j}$.
Posons $Q(X) = \frac{P(X)}{(X - \lambda_j)^{m_{k_j}} (X - 1/\lambda_j)^{m_{k_j}}}$ (qui est effectivement un polynôme par hypothèse sur les multiplicité) on a $Q(\lambda_j) \neq 0$ alors que $Q(1/\lambda_j) = 0$, or Q est réciproque par construction, ce qui contredit l'affirmation précédente.

3 ▷ Si Q est anti réciproque, on vérifie alors $Q(1) = -Q(1)$ donc $Q(1) = 0$. Ainsi, on peut définir le polynôme $P(X) = Q(X)/(X-1)$. On remarque alors que $X^{p-1}P(\frac{1}{X}) = \frac{X^pQ(\frac{1}{X})}{X(\frac{1}{X}-1)} = \frac{-Q(X)}{1-X} = P(X)$. Donc P est réciproque, d'où le résultat.

4 ▷ Par hypothèse le produit des racines de R est égale à son inverse, donc ce produit vaut 1 ou -1.

5 ▷ On raisonne par récurence forte sur le degré de R, que l'on note n.

Si $n = 1$, $R(X) = X - a$ a une unique racine complexe a. Dès lors a est égale au produit des racines de $R(X)$. Ainsi, $a \in \{-1, 1\}$. Le calcul évident de $XR(1/X)$ montre que si $a = 1$, R est réciproque, sinon il est antiréciproque.

Si le résultat est vrai au rang k pour k dans $\{0, ..., n\}, n \geq 1$, on suppose R de degré $n+1$, il est non constant donc admet des racines. Si a est racine de R de multiplicité $m > 0$, $1/a$ aussi et avec le même multiplicité, on applique l'hypothèse de récurence à $H(X) = \frac{R(X)}{(X-a)^m(X-1/a)^m}$ de degré strictement inférieur à $n+1$ et dont le produit des racines avec multiplicité est toujour 1 ou -1, car c'est le produit des racines de R quotienté par $(a/a)^m = 1$. Comme $(X-a)^m(X-1/a)^m$ est réciproque (évident), R hérite du caractère réciproque/antiréciproque de H.
D'où le résultat.

Partie 2. Le cas diagonalisable.

6 ▷ On a $\det(xI_n - A) = \det(A(xA^{-1} - I_n)) = \det(A)\det(xA^{-1} - I_n) = \det(A)(-x)^n \det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1})$ par $n-$linéarité et multiplicativité du déterminant.

7 ▷ Deux matrices semblables ont le même déterminant. Si A et A^{-1} le sont, alors $\det(A) = \det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ donc $\det(A)$ vaut 1 ou -1. Or $(-1)^n \det(A)$ est le coefficient de degré 0 de $\chi_A(X)$, et est donc égal au signe près aux racines de $\chi_A(X)$. Une autre manière de le voir vient du fait que comme A et A^{-1} sont semblables, $\chi_A(X) = \chi_{A^{-1}}(X)$. Ceci ajouté au résultat de la question 6 donne

$$\chi_A(X) = (-1)^n \det(A) \times X^n \chi_{A^{-1}}(1/X) = (-1)^n \det(A) \times X^n \chi_A(1/X)$$

Ce qui achève la preuve car $(-1)^n \det(A)$ est dans $\{-1, 1\}$.

8 ▷ Si $\chi_B(X)$ est réciproque, comme les valeurs propres de B sont les racines de $\chi_B(X)$, et que B est diagonalisable, elle est semblable à une matrice de la forme (question 2) :

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 I_{n_1} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{1}{a_1} I_{n_1} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_k I_{n_k} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{a_k} I_{n_k} \end{pmatrix}$$

où les a_i sont non nuls, impliquant que δ est inversible, donc que B l'est aussi par similitude.
Or comme B est inversible, on a pour tout i que

$$\text{Ker}(B - a_i I_n) = \text{Ker}(B(I_n - a_i B^{-1})) = \text{Ker}(I_n - a_i B^{-1}) = \text{Ker}(B^{-1} - 1/a_i I_n)$$

Du fait que la somme des espaces propres de B est directe et du fait de la diagonalisabilité de B, on en tire que B^{-1} est diagonalisable, de mêmes valeurs propres avec même multiplicité (pour tout i, la dimension de $\mathrm{Ker}(B - a_i I_n)$ est la même que $\mathrm{Ker}(B - 1/a_i I_n)$ par ce qui précède). Donc B^{-1} est semblable à Δ donc à B.
Si χ_B est antiréciproque, la question 3 assure que 1 est valeur propre de B et que B est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$ où $\chi_{\tilde{B}}$ est réciproque.
On conlut par le cas précédent, du fait qu'on en tire que $\tilde{B}$ est inversible semblable à son inverse et qu'alors B est inversible d'inverse semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{B}^{-1} \end{pmatrix}$ qui est lui même semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$ car $\tilde{B}$ et son inverse le sont.

9 ▷ On a que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B - 2I_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\mathrm{Ker}(B^{-1} - 2I_2) = \mathrm{Vect}(2e_3 - e_4)$. Ces espaces n'ont pas la même dimension alors que cela devrait être le cas si χ_B était réciproque ou anti-réciproque (car $2 \neq 1$ donc on se ramène au cas χ_B réciproque et on utilise la question 2).

Partie 3. Produit de matrices de symétries

10 ▷ S_1 et S_2 sont inversibles (égale à leur inverse par hypothèse) donc par produit $A = S_1 S_2$ l'est aussi et $A^{-1} = S_2 S_1$. Et on a clairement $S_1 A^{-1} S_1^{-1} = S_1 A^{-1} S_1 = S_1 S_2 S_1 S_1 = S_2 S_1 = A$. D'où le résultat.

11 ▷ La réponse est oui. Si P est inversible et S_1, S_2 deux symétries, alors $(PS_1P^{-1})(PS_1P^{-1}) = PS_1S_1P^{-1} = PP^{-1} = I_n$ ainsi PS_1P^{-1} est toujours une symétrie, idem avec PS_2P^{-1}. Donc $PS_1S_2P^{-1} = PS_1P^{-1}PS_2P^{-1}$ est effectivement un produit de deux symétries.

12 ▷ On veut $S_1^2 = I_{2n}$. À savoir

$$S_1^2 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & P \\ Q & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ & 0_n \\ 0_n & QP \end{pmatrix}$$

Ainsi, S_1 est une symétrie si et seulement si $PQ = QP = I_n$, c'est-à-dire que $Q = P^{-1}$.
On veut également que $S_2 = S_1 A$, on veut $S_2^2 = I_{2n}$. Calculons d'abord S_2 :

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0_n & P \\ P^{-1} & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ P^{-1}B & 0_n \end{pmatrix}$$

Puis calculons S_2^2 :

$$S_2^2 = \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ P^{-1}B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & PC \\ P^{-1}B & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PCP^{-1}B & 0_n \\ 0_n & P^{-1}BPC \end{pmatrix}$$

Pour que S_2 soit une symétrie, il faut donc :

$$PCP^{-1}B = I_n \quad \text{et} \quad P^{-1}BPC = I_n$$

Ces deux conditions sont équivalentes à :

$$B^{-1} = PCP^{-1} \quad \text{et} \quad B = PC^{-1}P^{-1}$$

Ce qui implique que $C^2 = I_n$. Dans ce cas, la condition sur B, B^{-1} se simplifie en $B = PC^{-1}P^{-1}$. Les conditions $P^{-1} = Q$ et $B = PC^{-1}P^{-1}$ sont donc nécessaires, et on montre aisément quelles sont suffisantes en remontant les calculs détaillés ici.

13 $\triangleright$ Si on a $C = PB^{-1}P^{-1}$ où $P \in \mathbf{GL}_n$, on a que les matrices $S_1 := \begin{pmatrix} 0_n & P \\ P^{-1} & 0_n \end{pmatrix}$ et $S_2 := S_1 A$ sont des matrices de symétrie par la question précédente. Ainsi $A = S_1^{-1} S_1 A = S_1 S_2$ est un produit de matrices de symétries.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$

14 $\triangleright$ $g^{n-1} \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $g^{n-1}(x) \neq 0$. Comme g est linéaire, on a $g^k(x) \neq 0$ pour $k \in \{0, ..., n-1\}$. Montrons que la famille $(x, g(x), ..., g^{n-1}(x)$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k g^k(x) = 0 \quad (\star)$.

En appliquant g linéaire $n-1$ fois à l'équation $(\star)$, comme $g^n = 0$ il vient $\lambda_0 g^n(x) = 0$ donc $\lambda_0 = 0$ car $g^{n-1}(x) \neq 0$. On montre ainsi successivement que pour tout k dans $\{0, ..., n-1\}$, $\lambda_k = 0$, en réitérent la même méthode (appliquer g^{n-2} à $(\star)$, puis g^{n-3}, etc. jusqu'à g).

S'agissant d'une famille libre maximale (n vecteurs en dimension n), c'est une bien une base de E. On vérifie alors que la matrice de g dans cette base est bien n (c'est immédiat, pour le dernier terme, se rappeler que $g^n(x) = 0$).

15 $\triangleright$ On a que $\det(J_n(\lambda)) = \lambda^n \neq 0$ car $\lambda \neq 0$. Donc $J_n(\lambda)$ est inversible.

Par ailleurs, comme N est nilpotente d'ordre n (car $g^{n-1} \neq 0$ et $g^n = 0$ et N est la matrice de g dans la base de la question précédente) et que I_n et N commutent, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
J_n(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^k} N^k &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\lambda I_n \frac{(-1)^k}{\lambda^k} N^k + N \frac{(-1)^k}{\lambda^k} N^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(-1)^k}{\lambda^{k-1}} N^k + \frac{(-1)^k}{\lambda^k} N^{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k-1}} N^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^k} N^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k-1}} N^k + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{\lambda^k} N^{k+1} \qquad (N^n = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k-1}} N^k + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{\lambda^{k-1}} N^k
\end{aligned}$$

D'où $J_n(\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^k}N^k = \lambda I_n$

Donc $J_n(\lambda)$ est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^k}N^k = \frac{1}{\lambda}I_n + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^k}N^k =: \frac{1}{\lambda}I_n + N'$

Intuition pour cette question : Comme N est nilpotente, l'idée est de faire comme pour le développement en série entière de $\frac{1}{\lambda - X}$... Mais avec des matrices ! La somme infini devient une somme finie car N est nilpotente, et le fait que N et I_n commutent permet de concrétiser.

16 ▷ $N' = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^k}N^k = N\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{\lambda^k}N^{k-1}$ est le produit de N avec un polynôme en N que l'on note $P(N)$. Comme N et $P(N)$ commutent, On a que $(N')^n = N^nP(N)^n = 0$ car $N^n = 0$.

Ainsi, N' est nilpotente d'ordre n (on vérifie en effet que $(N')^{n-1}$ est non nulle, proportionnelle à N^{n-1}). Donc semblable à N.

On note $P \in \mathbf{GL}_n$ telle que $PNP^{-1} = N'$, on en tire que $J_n(\lambda)^{-1} = P(\frac{1}{\lambda}I_n + N)P^{-1} = PJ_n(\frac{1}{\lambda})P^{-1}$.

17 ▷

- On a $(-1)^2 = 1$ donc $s_1^2 = I_d$
- Également, 1 - (1-X) = X donc $s_2^2 = I_d$
- Enfin, pour $k \in \{0, ..., n-1\}$ (il suffit de regarder une base de l'espace s'agissant d'endomorphismes) on a $s_1 \circ s_2(X^n) = s_1((1-X)^n) = (1+X)^n = g(X^n) + X^n$.

Donc $s_1 \circ s_2 = g + I_d$

18 ▷ g réduit le degré des monômes X^k pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ de exactement 1 (si on considère que $\deg(0) = -1$) car $(1+X)^k = X^k + \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j$ et $\binom{k}{k-1} \neq 0$.

Ainsi par linéarité de g et échelonnage par degré, on en tire que $\deg(g(P)) = \deg(P) - 1$ pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

19 ▷ Pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, $\deg(g^{k+1}(X^k)) = \deg(X^k) - (k+1) = k - (k+1) = -1$ par la question précédente. En particulier, $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$ (non nulle en X^{n-1}). Ainsi, la matrice de g dans une certaine base est N d'après la question 14. Dans cette même base, la matrice de $s_1 \circ s_2 = I_d + g$ est donc $J_n(1)$. Et la question 17 assure que s_1 et s_2 sont des matrices de symétries.

Partie 5. Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse.

20 ▷ D'après le résultat admis, il existe $P \in \mathbf{GL}_n$ tel que $PAP^{-1} = A'$. Ainsi, on a $P^{-1}A^{-1}P = (PAP^{-1})^{-1} = (A')^{-1} = \mathrm{Diag}(J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}, ..., J_{n_r}(\lambda_r)^{-1})$.
Or, la question 16 assure que pour $i \in \{1, ..., r\}$, il existe $Q_i \in \mathbf{GL}_{n_i}$ telle que $J_{n_i}(\lambda_i)^{-1} = Q_iJ_{n_i}(1/\lambda_i)Q_i^{-1}$. Posons la matrice diagonale par blocs $Q = \mathrm{Diag}(Q1, ..., Qr)$. Q est inversible car ses blocs diagonaux le sont et on vérifie que

$$Q\mathrm{Diag}(J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}, ..., J_{n_r}(\lambda_r)^{-1})Q^{-1} = \mathrm{Diag}(J_{n_1}(1/\lambda_1), ..., J_{n_r}(1/\lambda_r))$$

On en tire $A^{-1} = PQ^{-1}\mathrm{Diag}(J_{n_1}(1/\lambda_1), ..., J_{n_r}(1/\lambda_r))QP^{-1}$. Ce qui achève la preuve.

21 ▷ On écrit, quitte à prendre $n_1, n_2 = 0$ et prendre r plus grand que A est semblable à :

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(1) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(-1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_3}(\lambda_3) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

On sait par la question 19 que $J_{n_1}(1) \sim s_1 s_2$ et $J_{n_1}(-1) \sim s_1' s_2'$ produit de matrices de symétries.

Reste à regarder la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{n_3}(\lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est réciproque (on a enlevé tous les 1) par la question 3 (il ne peut pas être antiréciproque) et 7 (il est réciproque ou antiréciproque).

Or, quitte à conjugué par une matrice de permutations, on peut regrouper les blocs de Jordan en prenant d'une part les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_q$ et d'autres part leurs inverse qui ont même multiplicité (par la similitude obtenues à la question 20). On obtient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ avec B et C^{-1} semblables. On conclut par la question 13.

FIN DU PROBLÈME