

MINES PSI 2025 - Maths 1

Rothlingshofer Yanic

Contact : Pour toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur : yrothlin-24@telecom-paris.fr.

Remarque : Ce document peut contenir des coquilles ou des inexactitudes (fautes de signes, inattentions, etc.). Merci de ne pas tout prendre au pied de la lettre et de me faire part de vos retours (il a été rédigé juste après l'épreuve donc dans la précipitation). Ce document sert principalement à fournir des pistes qu'à prétendre fournir une correction exacte (même si j'essaie d'être le plus rigoureux possible).

Partie 1. Polynômes réciproques

1. Prenons la décomposition $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. Par définition d'un polynôme réciproque, on a alors :

$$\sum_{k=0}^p a_k X^k = \sum_{k=0}^p a_k X^{p-k} = \sum_{k=0}^p a_{p-k} X^k$$

d'où $\sum (a_k - a_{p-k})X^k$ est le polynôme nul donc tous ses coefficients sont nuls par définition et on obtient le résultat. Réciproquement, on fait le changement de variable dans la somme.

2. Remarquons que P est scindé de degré p et on a donc $\sum_i m_i = p$ donc on peut écrire $X^p = X^{m_1} \dots X^{m_d}$. On a alors :

$$X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p X^p \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{X} - \lambda_i\right)^{m_i} = a_p \prod_{i=1}^d (1 - \lambda_i X)^{m_i}$$

Supposons que P soit réciproque, on a $P(X) = \tilde{P}(X) = X^p P(1/X)$. D'après ce qui précède, $\tilde{P}(X)$ est bien défini en 0 et vaut a_p . On a donc :

$$P(0) = (-1)^p \prod_{i=1}^d \lambda_i^{m_i} = \tilde{P}(0) = a_p \neq 0$$

d'où pour tout $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\lambda_i \neq 0$ (sinon le produit serait nul). Enfin $P(\lambda_i) = 0 = \lambda_i^p P(1/\lambda_i)$. Or $\lambda_i \neq 0$ donc $\lambda_i^p \neq 0$ d'où $P(1/\lambda_i) = 0$.

3. Soit Q antisymétrique. On a clairement $2Q(1) = 0$ donc $Q(1) = 0$ et donc 1 est racine de Q . On en déduit que Q est factorisable par $(X - 1)$ et donc il existe P de degré $p - 1$ tel que $Q(X) = (X - 1)P(X)$.

- Si $p = 1$, alors P est constant (car de degré 0).
- Si $p \geq 2$, alors :

$$(X - 1)P(X) = -X^p \left(\frac{1}{X} - 1\right) P\left(\frac{1}{X}\right)$$

d'où :

$$(X - 1)(X^{p-1}P(1/X) - P(X)) = 0$$

on en déduit que $(X^{p-1}P(1/X) = P(X)$ or $p - 1 = \deg(P)$ donc P est bien réciproque. (si l'égalité n'est pas clair on peut le faire par l'absurde ou par d'autres méthodes).

4. Attention à ne pas se faire avoir (je me suis fait avoir en première approche), R n'est pas nécessairement de degré pair, il faut bien prendre en compte 1 et -1 comme racines non nulles potentielles. Notons $r_1, \dots, r_d$ les racines non nulles de R différentes de 1 et -1 avec leur multiplicité m_i , telles que pour $j \neq i$, $r_j \neq 1/r_i$. On peut écrire le produit des racines (que l'on note A) de R :

$$A = 1^{m(1)} (-1)^{m(-1)} \prod_{i=1}^d r_i^{m_i} \left(\frac{1}{r_i}\right)^{m_i}$$

car si r_i est racine de multiplicité m_i , alors $1/r_i$ l'est aussi de multiplicité m_i . Puisque les r_i sont différents de 1 ou -1, le produit vaut 1 et $1^q = 1$ donc :

$$A = (-1)^{m(-1)}$$

qui vaut 1 ou -1.

5. Notons $\tilde{R}(X) = X^p R(1/X)$. On a $\tilde{R}$ qui est de même degré que R et il admet les mêmes racines que R avec les mêmes multiplicités et donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\tilde{R} = \lambda R$. En notant (a_k) les coefficients de R , on a le coefficient dominant de $\tilde{R}$ vaut d'un côté λa_n (issu de $\tilde{R} = \lambda R$) et d'un autre côté il vaut a_0 en écrivant la somme de $X^p R(1/X)$. De même on a d'un côté λa_0 et de l'autre a_n en coefficient constant de $\tilde{R}$ et par unicité des coefficients de $\tilde{R}$, on a $\lambda^2 = 1$ d'où $\lambda = \pm 1$. On en déduit facilement le résultat.

Partie 2 : Le cas diagonalisable

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

6. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \det(xI_n - A) &= \det(xA(A^{-1} - \frac{1}{x}I_n)) = \det(-xA)\det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}) \\ &= (-1)^n x^n \det(A)\det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}) \end{aligned}$$

7. Puisque A est semblable à A^{-1} , il existe P inversible tel que $A = PA^{-1}P^{-1}$. On a :

$$\det(A) = \det(PA^{-1}P^{-1}) = \det(P P^{-1}) \frac{1}{\det(A)}$$

d'où $\det(A)^2 = 1$ donc $\det(A) = \pm 1$. En injectant ce résultat dans la question précédente, on en déduit le résultat.

8. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de B et notons $B = PDP^{-1}$. On sait (cours) ou on montre que $\chi_B(X) = \chi_D(X)$ et de même $\chi_B(1/X) = \chi_D(1/X)$. On a donc χ_D qui est réciproque ou antiréciproque. Si χ_D est réciproque, 0 n'est pas valeur propre d'après Q2. Si χ_D est antiréciproque, alors $\chi_D(X) = (X-1)P(X)$ avec $P(X)$ réciproque donc 0 n'est pas racine de χ_D est donc 0 n'est toujours pas valeur propre. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de B et donc B est inversible. D'après ce qui précède, on sait que si λ_i est racine de χ_D (réciproque ou antiréciproque), alors $1/\lambda_i$ est aussi racine donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_j = 1/\lambda_i$. On peut alors construire une permutation des (λ_i) tel que $(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = \sigma(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Notons Q la matrice de cette permutation (inversible car il existe d tel que $Q^d = I_n$), on a alors $QDQ^{-1} = D^{-1}$ (*) et donc :

$$B^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}$$

Ainsi en posant $S = PQ^{-1}P^{-1}$ (inversible d'inverse $S^{-1} = PQP^{-1}$), on a $SB^{-1}S^{-1} = PDP^{-1} = B$ d'où le résultat.

9. On a :

$$B - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

d'où $(B - 2I_4)X = 0$ revient au système :

$$x_3 = -2x_4 \quad \text{et} \quad x_4 = 0$$

donc $X = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $\text{Ker}(B - 2I_4)$ est de dimension 2. De la même manière, on montre que $\text{Ker}(B^{-1} - 2I_4)$ est de dimension 1. Or Si $B = PB^{-1}P^{-1}$, on aurait $B - 2I_4 = P(B^{-1} - 2I_4)P^{-1}$ et donc $\text{Ker}(B - 2I_4) = \text{Ker}(B^{-1} - 2I_4)$ ce qui n'est pas possible car $\dim(\text{Ker}(B - 2I_4)) \neq \dim(\text{Ker}(B^{-1} - 2I_4))$. Ainsi B n'est pas semblable à B^{-1} .

Partie 3. Produits de matrices symétriques

10. On pose $A^{-1} = S_2 S_1$ et on a bien $A^{-1} A = I_n$ par définition de S_1 et S_2 comme matrices de symétries. On prend alors $P = S_1$ inversible avec $P^{-1} = P$, et on a $PA^{-1}P^{-1} = S_1 S_2 = A$ d'où le résultat. ...
11. Oui, si l'on écrit $B = PAP^{-1}$, on pose $S'_1 = PS_1 P^{-1}$ et $S'_2 = PS_2 P^{-1}$. Alors on vérifie bien $B = PAP^{-1}$ (au moins) et on a bien $S'^2_1 = PS^2_1 P^{-1} = I_n$. Et on en déduit donc de même pour S'_2 et donc B est bien un produit de matrices de symétries.
12. Il faut que $P = Q^{-1}$ et $B^{-1} = PCP^{-1}$.
13. OK, supposons que $C = PB^{-1}P^{-1}$, alors on pose S_1 la matrice définie en Q12 avec $Q = P$ et $P = P^{-1}$ (on se comprend) qui définit bien une symétrie d'après la question précédente. Puis S_2 définie à la question précédente définit bien une symétrie et donc $S_2 = S_1 A$ puis $A = S_1^{-1} S_2 = S_1 S_2$ par définition d'une matrice de symétrie.

Partie 4. La matrice $J_n(\lambda)$

14. Facile, puisque $g^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $g^{n-1}(x) \neq 0$ et on prend la famille $(x, g(x), \dots, g^{n-1}(x))$. Puis on pose $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k g^k(x) = 0$, on compose par g^{n-1} et on obtient $\alpha_{n-1} g^{n-1}(x) = 0$ (car les g^{n-1+k} sont nuls pour $k \geq 1$) or $g^{n-1}(x) \neq 0$ donc $\alpha_0 = 0$. Puis on compose la somme par g^{n-2} , on en déduit que $\alpha_1 = 0, \dots$. Finalement on obtient une famille libre de n vecteurs en dimension n donc c'est une base. On prend alors la matrice g dans la base $(g^{n-1}(x), g^{n-2}(x), \dots, x)$ qui vaut bien N .
15. $J_n(\lambda)$ est triangulaire supérieure et $\det(J_n(\lambda)) = \lambda^n \neq 0$ donc cette matrice est bien inversible. On a :

$$(I_n + N) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k N^k = I_n + (-1)^n N^n = I_n$$

puis on en déduit $(I_n + \frac{1}{\lambda} N) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\lambda^k} N^k = I_n$. Puis en mettant λ en facteur, on obtient :

$$(I_n + \lambda N) \left(\frac{1}{\lambda} I_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\lambda^{k+1}} N^k \right) = I_n$$

d'où l'on déduit N' .

16. Il est clair que $(N')^n = 0$ car le plus petit terme en puissance de N vaut $N^n = 0$ car N est nilpotente d'indice $n-1$ (on peut le montrer facilement). Ainsi d'après Q14, il existe P inversible tel que $N' = PNP$ et donc :

$$J_n(\lambda)^{-1} = P \left(\frac{1}{\lambda} I_n + N \right) P^{-1} = P J_n(1/\lambda) P^{-1}$$

d'où le résultat.

17. On a $s_1^2 = s_2^2 = \text{id}$. Puis $s_1 \circ s_2(P)(X) = s_1(P(1-X)) = P(1+X) = g(P)(X) + P(X)$. D'où $s_1 \circ s_2 = g + \text{id}$.
18. En écrivant $P(X) = \sum a_k X^k$, on montre facilement que le coefficient devant X^{d-1} (avec $d = \deg(P)$) s'annule dans $g(P)$ et donc $\deg(g(P)) = \deg(P) - 1$.
19. On a $g^n = 0$. Ainsi d'après Q14, en notant G la matrice de g , il existe P inversible tel que $G = PNP^{-1}$. Puis :

$$G + I_n = P(N + I_n)P^{-1} = P J_n(1) P^{-1}$$

Puis notons S_1 et S_2 les matrices des symétries s_1 et s_2 , on pose $\tilde{S}_1 = P^{-1} S_1 P$ et $\tilde{S}_2 = P^{-1} S_2 P$ qui sont des matrices de symétries également (facile à montrer) et donc on a :

$$\tilde{S}_1 \tilde{S}_2 = P^{-1} S_1 S_2 P = P^{-1} (G + I_n) P^{-1} = J_n(1)$$

d'où le résultat.

Partie 5. Caractérisation des matrices semblables à leur inverse

20. On a facilement que A^{-1} semblable à :

$$(A')^{-1} = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_r}(\lambda_r)^{-1} \end{pmatrix}$$

Puis d'après Q16, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $P_i \in \text{GL}_{n_i}(\mathbb{C})$ tel que $J_{n_i}(\lambda_i)^{-1} = P_i J_{n_i}(1/\lambda_i) P_i^{-1}$. Enfin en posant :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_r^{-1} \end{pmatrix}$$

on a :

$$(A')^{-1} = P \begin{pmatrix} J_{n_1}(1/\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_r}(1/\lambda_r) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Puis on conclut en disant que $A^{-1} = Q(A')^{-1}Q^{-1}$.

21. D'après Q7, puisque A est semblable à son inverse, χ_A est réciproque ou antiréciproque. Soit χ_A est réciproque auquel cas pour les λ_i , on a aussi $1/\lambda_i$ qui est valeur propre (de même multiplicité) donc il existe j tel que $\lambda_j = \frac{1}{\lambda_i}$. Si χ_A est antiréciproque, -1 est valeur propre et puis les autre valeurs propres sont racines d'un polynôme réciproque donc on revient au cas précédent. Finalement, on peut regrouper les blocs $J_{n_i}(\lambda_i)$ par paires et on peut, sans perte de généralités, réorganiser les les blocs dans A' pour l'écrire sous la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ 0 & J_{n_1}(1/\lambda_1) & \\ & & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec à la fin des blocs $J_{n_i}(\pm 1)$ et $J_{n_1}(1/\lambda_1)$ semblable à $J_{n_1}(\lambda_1)^{-1}$. Ainsi d'après Q13, on peut écrire les blocs de tailles $2n_i$ pour les $\lambda_i \neq \pm 1$ comme produits de deux matrices de symétries. De même d'après la Q19 les blocs $J_n(\pm 1)$ peuvent s'écrire comme produit de matrices de symétries. Finalement en notant $S_1^1, \dots, S_j^1$ et $S_1^2, \dots, S_j^2$ de tailles $2n_i$ pour les blocs associés aux $\lambda_i \neq \pm 1$ et de taille n_j sinon. On peut alors écrire :

$$A' = \begin{pmatrix} S_1^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_j^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_j^2 \end{pmatrix} = \tilde{S}_1 \tilde{S}_2$$

avec $\tilde{S}_1$ et $\tilde{S}_2$ deux matrices de symétries. Finalement A est semblable à A' donc d'après Q11 A s'écrit également comme produit de matrices de symétries.

Remarque :

top

Dans la question 21 on donne la trame générale de la réponse sans prétendre à fournir une rédaction de concours. Sur copie il faudrait davantage expliciter les décompositions et justifier les différentes écritures.