## I : ENSEMBLES DE NOMBRES

• On admet l'existence des ensembles de nombres usuels suivants :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

$\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des **entiers naturels** (c'est à dire les entiers positifs).
$\mathbf{Z}$ désigne l'ensemble des **entiers relatifs** (entiers positifs ou négatifs).
$\mathbf{D}$ désigne l'ensemble des **nombres décimaux** (de la forme $\frac{k}{10^n}$ avec $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$) .

$$\mathbf{D} = \left\{ \frac{k}{10^n} \ ; \ (k,n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \right\}$$

$\mathbf{Q}$ désigne l'ensemble des **nombres rationnels** (de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{Z}^*$) .

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ ; \ (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \ ; \ (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \right\}$$

$\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des **nombres réels**.
$\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des **nombres complexes** (de la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{i}^2 = -1$).

$$\mathbf{C} = \{a + \mathrm{i}b \ ; \ (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$$

L'ensemble $\mathbf{R}$ est appelé la **droite réelle** ou **droite numérique**.
L'ensemble $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ est appelé la **droite réelle achevée**.

• On admet l'existence des opérations usuelles sur $\mathbf{R}$ : addition $(+)$, soustraction $(-)$, multiplication $(\times)$, division $(/)$. On rappelle que 0 est l'élément neutre de l'addition et que 1 est l'élément neutre de la multiplication.
Si $x \in \mathbf{R}$ l'élément $-x \in \mathbf{R}$ est appelé l'**opposé** de $x$ et, si $x \in \mathbf{R}^*$ l'élément $\frac{1}{x} = x^{-1}$ est appelé l'**inverse** de $x$.
On se souviendra du fait que tous les ensembles précédents stables par addition et par multiplication, que les éléments de $\mathbf{N}$ n'ont en général pas leur opposé ni dans leur inverse dans $\mathbf{N}$, que les éléments de $\mathbf{Z}$ ont tous les opposés dans $\mathbf{Z}$ mais pas tous leur inverse dans $\mathbf{Z}$ (on dit que $\mathbf{Z}$ est une **groupe**), que les éléments de $\mathbf{Q}$ ont tous leur opposé et leur inverse (pour les éléments non nuls) dans $\mathbf{Q}$ et que ces dernières propriétés restent valables sur $\mathbf{R}$ (on dit que $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ sont des **corps**).

• On admet l'existence de la relation d'ordre usuelle $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$.
On dit que $x \in \mathbf{R}$ est **inférieur** (ou **inférieur ou égal**) à $y \in \mathbf{R}$ si $x \leqslant y$. On dit aussi dans ce cas que $y$ est **supérieur** (ou **supérieur ou égal**) à $y$.
On dit que $x \in \mathbf{R}$ est **strictement inférieur** à $y \in \mathbf{R}$ si $x < y$. On dit aussi dans ce cas que $y$ est **strictement supérieur** à $y$.
On rappelle que $x < y$ si et seulement si ($x \leqslant y$ et $x \neq y$).
On dit que $x \in \mathbf{R}$ est **positif** (resp. **négatif**) si $x \geqslant 0$ (resp. $x \leqslant 0$).
On dit que $x \in \mathbf{R}$ est **strictement positif** (resp. **strictement négatif**) si $x > 0$ (resp. $x < 0$).

• On introduit également les ensembles associés suivants :
$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \backslash \{0\}$ désigne l'ensemble des réels non nuls. On définit de même $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{D}^*$, $\mathbf{Q}^*$ et $\mathbf{C}^*$ .
$\mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_+^*$) désigne l'ensemble des réels positifs (resp. strictement positifs). On définit de même $\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N}$, $\mathbf{D}_+$ et $\mathbf{Q}_+$.
$\mathbf{R}_-$ (resp. $\mathbf{R}_-^*$) désigne l'ensemble des réels négatifs (resp. strictement négatifs). On définit de même $\mathbf{Z}_-$, $\mathbf{D}_-$ et $\mathbf{Q}_-$.
*Vous croiserez aussi les notations* $\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^{+*}$.

## II : Raisonnements élémentaires

• Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel** et il se lit « quel que soit » .
Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel** et il se lit « il existe » .

• Soit $E$ un ensemble.
On dit que $x$ est un **élément** de $E$ si $x$ appartient à $E$. On note $x \in E$ (négation : $x \notin E$).
Si $E$ ne contient aucun élément, $E$ est **l'ensemble vide**. On note $E = \varnothing$.
Si $A$ est un ensemble, on dit que $A$ est **inclus** dans $E$ si tout élément de $A$ est un élément de $E$. On note $A \subset E$ ou $A \subseteq E$.

• Soit $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$.
La **réunion** (ou **union**) $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans $A$ ou dans $B$.
L'**intersection** $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont à la fois dans $E$ et dans $F$.
La **différence** $A \backslash B$ est l'ensemble des éléments de $E$ qui sont dans $A$ et qui ne sont pas dans $B$.

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Le **complémentaire de** $A$ **dans** $E$, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$.
On a donc $\overline{A} = E \backslash A$.

## III : Intervalles et voisinages

• Si $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a \leqslant b$ on introduit les ensembles appelés **intervalles** :

$$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \ ; \ a \leqslant x \leqslant b\} \quad ; \quad [a,b[ = \{x \in \mathbf{R} \ ; \ a \leqslant x < b\} \quad ; \quad [a,+\infty[ = \{x \in \mathbf{R} \ ; \ x \geqslant a\}$$

$$]a,b] = \{x \in \mathbf{R} \ ; \ a < x \leqslant b\} \quad ; \quad ]a,b[ = \{x \in \mathbf{R} \ ; \ a < x < b\} \quad ; \quad ]-\infty,b] = \{x \in \mathbf{R} \ ; \ x \leqslant b\}$$

On a la caractérisation suivante des intervalles de $\mathbf{R}$ : une partie $I$ de $\mathbf{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout $(x,y) \in I^2$ avec $x \leqslant y$ on a $[x,y] \subset I$.

• Les intervalles du type $]a,b[$ sont appelés **intervalles ouverts**.
Les intervalles du type $[a,b]$ sont appelés **intervalles fermés bornés** (on parle aussi de **segment**).
Les intervalles du type $[a,b[$ ou $]a,b]$ sont appelés **intervalles semi-ouverts** (ou semi-fermés).
Les intervalles du type $]-\infty,b]$ ou $[a,+\infty[$ sont appelés **demi-droites fermées**.
Les intervalles du type $]-\infty,b[$ ou $]a,+\infty[$ sont appelés **demi-droites ouvertes**
Les réels $a$ et $b$ sont les **extrémités** (inférieure ou supérieure) de l'intervalle. On dit qu'un intervalle d'extrémités $a$ et $b$ est **non trivial** si $a < b$.
On définit l'**intérieur d'un intervalle** $I$ comme l'intervalle ouvert ayant les mêmes extrémités que $I$ (si $a = b$ cet intérieur est l'ensemble vide).
Remarquons que $\mathbf{R} = ]-\infty,+\infty[$.

• Si $n$ et $p$ sont deux entiers relatifs avec $n \leqslant p$ on introduit les ensembles d'entiers suivants :

$$[\![n,p]\!] = \{k \in \mathbf{Z} \mid n \leqslant k \leqslant p\} = [n,p] \cap \mathbf{Z} \quad ; \quad [\![n,+\infty[\![ = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \geqslant n\} = [n,+\infty[ \cap \mathbf{Z} \quad ; \quad ]\!]-\infty,p]\!] = \{k \in \mathbf{Z} \mid k \leqslant p\} = ]-\infty,p] \cap \mathbf{Z}$$

• Si $a \in \mathbf{R}$ on appelle **voisinage de** $a$ **dans** $\mathbf{R}$ une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle ouvert du type $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$.
Un **voisinage de** $+\infty$ est une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle du type $]a,+\infty[$.
Un **voisinage de** $-\infty$ est une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle du type $]-\infty,a[$.
Si $a \in \overline{\mathbf{R}}$ on notera $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$ dans $\mathbf{R}$.
On dit qu'une application $f : D \to \mathbf{R}$ est **définie au voisinage de** $a$ si

$$\forall V \in \mathscr{V}(a) \ , \ D \cap V \neq \varnothing$$

Dans ce cas, on dit que $f : D \to \mathbf{R}$ **vérifie** $(\mathscr{P})$ **au voisinage de** $a$ si il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f$ vérifie $(\mathscr{P})$ sur $V \cap D$.

Le cas le plus généralement rencontré est celui où $D = I$ est un intervalle et où $a$ est une extrémité de $I$.