I : Rappels sur le calcul élémentaire

Propriété 1:

Soit x, y, z, t des nombres complexes et n, m deux entiers naturels. Dès que les fractions ont un dénominateur non nul et que les nombres sous les racines carrées sont des réels positifs, on a :

$$x^n \times x^m = x^{n+m} \quad ; \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad ; \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad ; \quad (x^n)^m = x^{n\times m} \quad ; \quad x^0 = 1$$

$$x^n \times y^n = (x \times y)^n \quad ; \quad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \quad ; \quad \sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y} \quad ; \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad ; \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad ; \quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$z \times \frac{x}{y} = \frac{z \times x}{y} = x \times \frac{z}{y} \quad ; \quad \frac{x}{y} + \frac{z}{t} = \frac{x \times t + z \times y}{y \times t} \quad ; \quad \frac{x}{y} \times \frac{z}{t} = \frac{x \times z}{y \times t}$$

II : Manipulation d'inégalités et d'égalités

Propriété 2:

Soit x, y, z, t des réels.

(1) Si $x \leqslant z$ et $y \leqslant t$ alors $x + y \leqslant z + t$.
(2) Si $x \leqslant z$ et $y \geqslant 0$ alors $x \times y \leqslant z \times y$.
(3) Si $x \leqslant z$ et $y \leqslant 0$ alors $x \times y \geqslant z \times y$.
(4) Si $0 \leqslant x \leqslant z$ et $0 \leqslant y \leqslant t$ alors $0 \leqslant x \times y \leqslant z \times t$.
(5) Soit m et n des entiers naturels avec $m < n$ et $(a_i, b_i) \in \mathbf{R}^2$ pour tout $i \in [\![m, n]\!]$.

$$(\forall\, i \in [\![m, n]\!] \ , \ a_i \leqslant b_i) \Longrightarrow \left(\sum_{i=m}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=m}^{n} b_i\right)$$

Propriété 3:

(1)Autour du carré

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \ , \ x^2 = y^2 \Longleftrightarrow (x = y \ \text{ OU } \ x = -y)$$

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \ , \ x^2 < y^2 \Longleftrightarrow x < y \quad ; \quad \forall (x, y) \in (\mathbf{R}_-)^2 \ , \ x^2 < y^2 \Longleftrightarrow x > y$$

$$\forall (x, a) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+ \ , \quad x^2 > a \Longleftrightarrow (x < -\sqrt{a} \ \text{ OU } \ x > \sqrt{a}\,) \quad \text{ ET } \quad x^2 < a \Longleftrightarrow (\,-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}\,)$$

(2) Autour de la racine carrée

$$\forall x \in \mathbf{R} \ , \ \sqrt{x^2} = |x| \quad ; \quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \ , \ (\sqrt{x})^2 = x \quad ; \quad \forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \ , \ \sqrt{x} = \sqrt{y} \Longleftrightarrow x = y$$

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \ , \quad \sqrt{x} = y \Longleftrightarrow x = y^2 \quad ; \quad \forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2 \ , \quad x < y \Longleftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

(3) Autour de l'inverse

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2 \ , \ \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Longleftrightarrow x = y \quad ; \quad \forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2 \ , \ \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Longleftrightarrow x > y$$

Remarque 1:

- ✓ On ne fait pas la soustraction ni la division de deux inégalités « tel quel » : pour soustraire on multiplie d'abord par (-1) puis on ajoute ; et pour diviser on passe d'abord à l'inverse puis on multiplie.
- ✓ Quand on multiplie une inégalité par une quantité contenant une variable (il faut pour cela que la quantité ait un signe constant), il faut justifier en précisant le signe de cette quantité.
- ✓ Si on veut étudier le signe d'une quantité, la méthode la plus classique consiste à factoriser l'expression et à faire un tableau de signe.

III : Equations et inéquations classiques

Propriété 4: Signe de $ax+b$

Soit $(a,b)\in \mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe opposé	0	signe de a	

Propriété 5: Signe de ax^2+bx+c

Soit $(a,b,c)\in \mathbf{R}^*\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. On pose $\Delta=b^2-4ac$. On a l'alternative suivante :

- $\Delta>0$: deux racines réelles $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- $\Delta=0$: une racine réelle double $x_1=-\dfrac{b}{2a}$ (même formule que ci-dessus avec $\Delta=0$) ,
- $\Delta<0$: deux racines complexes conjuguées $x_1=\dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $x_1=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Quand $\Delta\neq 0$, on a

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad ;\quad x_1\times x_2=\frac{c}{a}\quad ;\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

En particulier, les solutions de $x^2-sx+p=0$ vérifient $x_1+x_2=s$ et $x_1\times x_2=p$: ceci peut être utile pour trouver rapidement les solutions. Ci-dessous les tableaux de signes sur $\mathbf{R}$ (remarquer que $x_1\leq x_2$ ssi $a>0$) :

$\Delta>0$

x	$-\infty$		x_i		x_j		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe opposé	0	signe de a	

$\Delta=0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

$\Delta<0$

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Propriété 6: Signe de $a\ln(x)+b$

Soit $(a,b)\in \mathbf{R}^*\times\mathbf{R}$.

x	0		$\exp\left(-\frac{b}{a}\right)$		$+\infty$
$a\ln(x)+b$	‖	signe opposé	0	signe de a	

Propriété 7: Signe de ae^x+b

Soit $(a,b)\in(\mathbf{R}^*)^2$ avec $ab<0$.

x	$-\infty$		$\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$		$+\infty$
ae^x+b		signe opposé	0	signe de a	