TD 0 Analyse dimensionnelle

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSI2 - 2023-2024

1 Dimensions et unités

Exercice 1 - Conversion d'unités :

1.(a) $S = 0.2\ \text{cm}^2 = 0.2 \times ((10^{-2}\text{m})^2 = 0.2 \times 10^{-4}\text{m}^2$

(b) $V = 50\ \text{mm}^3 = 50\,(10^{-3}\text{m})^3 = 50 \times 10^{-9}\text{m}^3$

(c) $\rho = 2\ \text{g.cm}^{-3} = 2 \times (10^{-3}\text{kg}) \times (10^{-2}\text{m})^{-3} = 2 \times 10^3\text{kg.m}^{-3}$

2.(a) $\Phi = 0.1\ \text{J.cm}^{-2} = 0.1\,(\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}) \times (10^{-2}\text{m})^{-2} = 0.1 \times 10^4\text{kg.s}^{-2}$

(b) $J = 2\ \text{kW.h} = 2\times10^3\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}\times\text{s}^{-1}\times3600\text{s} = 7,2\times10^6\text{kg.m}^2.\text{s}^{-2} = 2\text{kJ}$ (*c'est plus joli comme ça !)*

(c) (*) $\nabla P = 10^{-3}\text{bar.mm}^{-1} = 10^{-3} \times (\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}) \times (10^{-3}\text{mm})^{-3} = 10^6\text{kg}.s^{-2}.m^{-4}$

Exercice 2 - Vérification de vraisemblance et ordres de grandeur :

- (a) : ii
- (b) : i (ou ii)
- (c) : ii
- (d) : i ou ii
- (c) : ii ou iii

Exercice 3 - Dimension :

On prend un à un les coefficient puis on les insère dans la formule ! !

- γ : pas d'unité donc pas de dimension !
- P_0 : pression $[P_0] = [F/S]$ avec $S = L^2$.
  Pour trouver la dimension d'une force on se rappelle la seconde loi de Newton : $ma = \sum F$ donc $[F] = [m] \times [a] = M \times LT^{-2}$. D'où $[P] = ML^{-1}T^{-2}$.
- ρ_0 : en kg.m^{-3} donc $[\rho_0] = M.L^{-3}$
- d : pas d'unité donc pas de dimension !
- T/T_0 est le rapport de deux températures donc $[T/T_0] = 1$

Finalement :

$$V = \left(1 \times \frac{ML^{-1}T^{-2}}{M.L^{-3} \times 1} \times 1\right)^{1/2} = \left(L^2T^{-2}\right)^{1/2} = LT^{-1}$$

C'est la dimension d'une vitesse. En faisant l'AN on trouve environ 272m.s^{-1} : c'est la vitesse du son dans l'air, donnée à une certaine température.

Exercice 4 - Analyse dimensionnelle :

Avant toute chose on va chercher la dimension de α :

$$\vec{F} = -\alpha\vec{v} \;\Rightarrow\; [F] = [\alpha][v] \;\Rightarrow\; [\alpha] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{[m \times a]}{[v]} = \frac{M \times LT^{-2}}{LT{-1}} = MT^{-1}$$

On vérifie ensuite les dimensions des expressions.

1. $v(t) = v_0 \exp\left(\frac{\alpha t}{m}\right)$
2. $v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)$
3. $v(t) = v_0 \exp(\alpha t)$
4. $v(t) = v_0 \exp(-\alpha t)$

Attention ! il y a un fonction mathématiques, ici la fonction exponentielle. Il faut alors vérifier deux choses :

1. que l'expression est juste dimensionnement
2. **ET** que l'expression dans l'exponentielle est de dimension 1

En se rappelant que $[\exp(....)] = 1$, on remarque que toutes les expressions ont la même dimension, celle d'une vitesse. Par contre :

▷ $\left[\dfrac{\alpha t}{m}\right] = \dfrac{[\alpha] \times [t]}{[m]} = \dfrac{MT^{-1} \times T}{M} = 1$

▷ $[\alpha t] = [\alpha] \times [t] = MT^{-1} \times T = M$

Il y a un problème d'homogénéité dans les expression 3 et 4 !
Pour distinguer 1 et 2 on peut remarquer que la vitesse dans le cas 1 augmente indéfiniment ce qui est "pas naturel". La bonne formule est donc la 2 !

Exercice 5 - Diffusivité thermique :

1. **Attention !** *si on ne fait pas les choses et les calculs proprement et pas à pas dans cette question ça va être un carnage !!*
   De plus, on va travailler avec les unités (même si on pourrait le faire avec les dimensions), c'est parfois plus naturel.
   ▷ R : $[R] = J.K^{-1}.mol^{-1} = kg.m^2.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1}$
   ▷ T : $[T] = K$
   ▷ $\mathcal{N}_A$: $[\mathcal{N}_A = mol^{-1}$
   ▷ σ : $[\sigma] = m^2$
   ▷ P : $[P] = kg.m^{-1}.s^{-2}$
   ▷ M : $[M] = kg.mol^{-1}$
   Donc :
$$[D] = \frac{\left(kg.m^2.s^{-2}.K^{-1}.mol^{-1} \times K\right)^{3/2}}{mol^{-1} \times m^2 \times kg.m^{-1}.s^{-2} \times \left(kg.mol^{-1}\right)^{1/2}} = \frac{kg^{3/2}\ m^3\ s^{-3}\ mol^{-3/2}}{mol^{-3/2}\ m\ kg^{3/2}\ s^{-2}} = m^2 s^{-1}$$
   On a donc $[D] = L^2T^{-1}$.
2. On cherche une expression de T comme : $T = \kappa D^\alpha L^\beta$. On a alors :
$$[T] = [D]^\alpha \times [L]^\beta \ \Rightarrow \ T = \left(L^2T^{-1}\right)^\alpha \times L^\beta = L^{2\alpha+1}T^{\beta-\alpha}$$
   On veut alors résoudre :
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases}$$
   On a donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$ soit une expression pour le temps T :
$$T = \kappa \frac{L^2}{D}$$
3. **IMPORTANT !!**
   On a trouvé : $T_{20} = \kappa \dfrac{L_{20}^2}{D}$. *Problème :* on ne connait ni D ni κ. Mais on remarque que $L_{20} = 2L_{10}$ et donc :
$$T_{20} = \kappa \frac{L_{20}^2}{D} = \kappa \frac{\left(2L_{10}\right)^2}{D} = 4 \times \underbrace{\kappa \frac{L_{10}^2}{D}}_{=L_{10}}$$
   Finalement $T_{20} = 4T_{10}$ soit 2 minutes.

Exercice 6 - Explosion atomique *(Pour aller plus loin)* :

1. On cherche à construire une distance R à partir de E, t et μ.
$[R] = L$; $[t] = T$; $[\mu] = M.L^{-3}$ et $[E] = M.L^2.T^{-2}$
On cherche R sous la forme : $R(t) = kE^\alpha \mu^\beta t^\gamma$ avec $[K] = 1$.
Donc $L = M^{\alpha+\beta}.L^{2\alpha-3\beta}.T^{-2\alpha+\gamma}$. Par identification, on obtient le système : $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha-3\beta=1 \\ -2\alpha+\gamma=0 \end{cases}$
Sa résolution conduite à $\alpha = \frac{1}{5}$; $\beta = -\frac{1}{5}$ et $\gamma = \frac{2}{5}$. La relation cherchée est donc de la forme : $\boxed{R(t) = K\left(\frac{E}{\mu}\right)^{1/5} t^{2/5}}$ (1)

2. Comme toute constante sans dimension, $K \simeq 1$ donc $R(t) \simeq \left(\frac{E}{\mu}\right)^{1/5} t^{2/5}$

3. On a $R^{5/2} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}\, t$. Si on trace $R^{5/2}$ en fonction de t, on obtient une droite de pente $p = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$, ce qui valide la loi (1).

4. La mesure expérimentale de la pente donne $p = 9,4.10^6$ m$^{5/2}$/s. Comme $E = \mu p^2$, on obtient numériquement : $\boxed{E = 8,8.10^{13} \text{ J}}$.

5. En exprimant E en tonnes de TNT : $\frac{8,8.10^{13}}{4,1865.10^9} = 21,3.10^3$ tonnes de TNT, résultat incroyablement proche des archives historiques.

6. A $t = 25$ ms, on applique encore la relation (1) avec $K = 1$, on obtient :
$R = \left(\frac{8,8.10^{13}}{1}\right)^{1/5} \times (2,5.10^{-3})^{2/5} = 140$ m.
A l'aide de la photographie et de l'échelle fournie, on mesure un rayon de l'ordre de $R_{exp} = 130$ à 140 m, ce qui est encore très bon.

7. Si on avait privilégié le diamètre D au lieu du rayon, on aurait écrit : $D^{5/2} = \sqrt{\frac{E}{\mu}}\, t$. En traçant $D^{5/2}$ en fonction de t, on aurait toujours une droite de pente p_0, ce qui valide encore la loi trouvée. Par contre, on aurait obtenu une pente $2^{5/2} = 5,6$ fois plus grande ! soit $p_0 = 53.10^6$ m$^{5/2}$/s. Ce qui correspondrait à $\boxed{E = 675.10^3 \text{ tonnes de TNT}}$.

8. Cet exemple montre qu'un petit facteur 2 peut vite jouer un rôle important avec le jeu des puissances. On trouve en effet que E_0 est 32 fois plus élevée que la réalité. En fait, ce problème se contourne en prenant une explosion de référence et en comparant l'évolution du rayon (ou du diamètre) par rapport à cette référence.