Chap V Les circuits linéaires du premier ordre

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

Table des matières

1 Charge d'un condensateur **3**
1.1 Mise en évidence expérimentale de la charge et la décharge d'un condensateur 3
1.2 Position du problème : Étude de la réponse indicielle 4
1.3 Mise en équation électrique 4

2 Equation différentielle linéaire à coefficient constant **6**
2.1 Definition et vocabulaire 6
2.2 Méthode de résolution 7
2.3 Application à la charge du condensateur 8
2.4 Condition initiale : valeurs des grandeurs électriques à $t = 0$ 10

3 Bilans énergétiques **15**
3.1 Bilan de puissance 15
3.2 Bilan d'énergie 16

4 Application **19**
4.1 La décharge du condensateur : Réponse en régime libre 19
4.2 Établissement d'un courant dans une inductance 20

Savoirs ♡

- ♡ Propriété de continuité des tensions et intensités d'un condensateur et d'une bobine.
- ♡ Notion d'équation différentielle et vocabulaire associé (linéaire, ordre, coefficient constant, équation homogène, ...)
- ♡ Forme générale des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant

Savoir Faire

Obtenir l'équation différentielle d'un circuit électrique

Obtenir les valeurs des grandeurs électriques d'un circuit à l'instant initial

Définir le temps caractéristique d'une équation d'ordre 1

Trouver la fonction solution d'un problème défini par :
- *une équation différentielle d'ordre 1*
- *des conditions initiales*

- *A partir d'une équation électrique ⇒ obtenir un bilan de puissance*
- *A partir d'un bilan de puissance ⇒ réaliser un bilan d'énergie*
- *Analyser les pertes éventuelles par effet Joule*

Un système linéaire du premier ordre est un système physique décrit par **une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants**. Nous allons étudier en détail les systèmes électriques de type.
Leurs résultats et les méthodes de résolution se généralisent aisément à tous les systèmes décrits par des équations différentielles similaires.

1 Charge d'un condensateur

1.1 Mise en évidence expérimentale de la charge et la décharge d'un condensateur

Expérience 1 : *Charge et décharge d'un condensateur.*

On réalise le montage électrique ci-contre :
- la tension $E(t)$ est une fonction créneau périodique ;
- R est une résistance variable ;
- $U_C(t)$ est la tension aux bornes du condensateur ;
- le condensateur C est initialement déchargé.

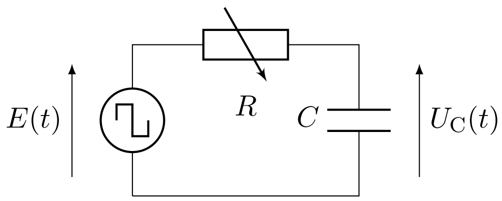


Fig. 1 – Schéma électrique du circuit RC.

On observe à l'oscilloscope simultanément la tension $E(t)$ et la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$. Les oscillogrammes observés sont reproduits qualitativement figure 2 pour deux valeurs de résistance.

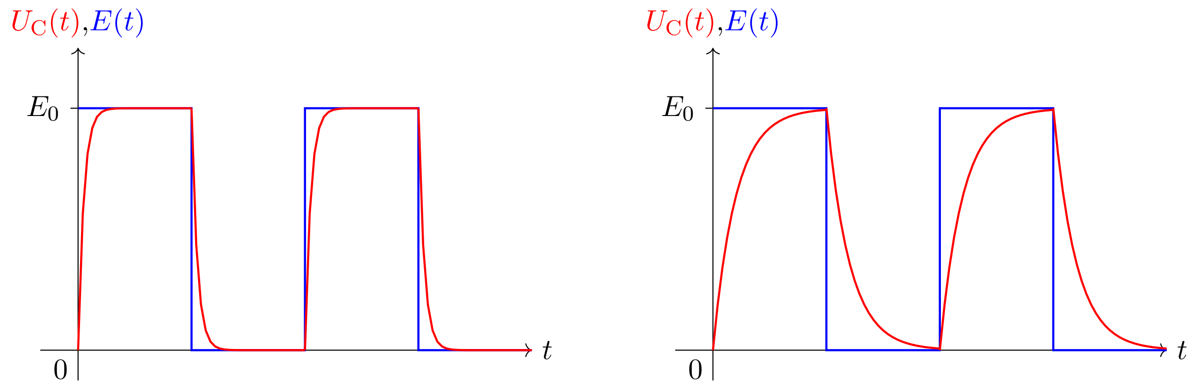


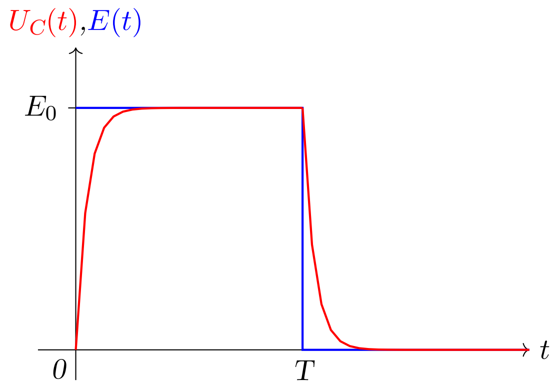
Fig. 2 – Représentation de deux oscillogrammes du circuit de la figure 1. Pour l'oscillogramme de gauche, la résistance R est plus faible que pour celui de droite.

On observe :
- au bout d'un certain temps, la tension aux bornes du condensateur est identique à celle imposée par la tension d'entrée ;
- ce temps est plus faible lorsque la résistance diminue.

Lorsque la tension aux bornes du condensateur est constante, la charge électrique $q(t)$ sur ses armatures est constante grâce à la relation $q(t) = CU_C(t)$.
Ainsi, on dit que le condensateur est **chargé**.

Définition. Régime libre et réponse indicielle

- **Régime libre** : l'évolution d'un circuit électrique en l'absence de source.
- **Réponse indicielle ou à un échelon** : l'évolution d'un circuit lorsque on applique au circuit un échelon de tension.

> *Exemple 1 : Dans notre exemple :*
>
> 
>
>
> ▷ *Régime libre : cela correspond à l'évolution du circuit lorsque la tension du générateur passe de $E_0 \to 0$.*
> ▷ *Réponse indicielle : cela correspond à l'évolution du circuit lorsque la tension du générateur passe de $0 \to E_0$.*

1.2 Position du problème : Étude de la réponse indicielle

Pour étudier la situation expérimentale réalisée précédemment, on étudie théoriquement le montage électrique ci-contre :
▷ la tension E_0 est une fonction constante ;
▷ l'interrupteur, initialement ouvert, est fermé au temps $t = 0$;
▷ le condensateur est initialement déchargé.

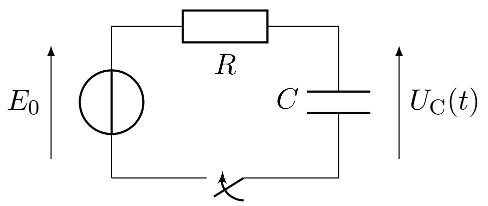


Fig. 3 – Schéma électrique de la charge du condensateur.

1.3 Mise en équation électrique

Dans ce paragraphe, et plus généralement pour tout problème électrique ayant des variations temporelles, on procédera en utilisant la méthode suivante.

Méthode pour obtenir une équation électrique :

1. **Définitions des grandeurs électriques**
   faire figurer et nommer toutes les tensions et tous les courants sur le schéma
   Attention ! aux conventions récepteurs ou générateurs

2. **Relation des dipôles**
   écrire toutes les relations constitutives des dipôles, numéroter les équations ;
   Attention ! on les écrit avec le nom des tensions/intensité introduits précédemment

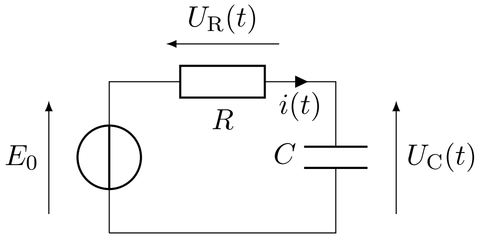
3. **Equations électriques**
   écrire toutes les lois des mailles et lois des nœuds indépendantes du problème, numéroter les équations ;

4. **Initialisation**
   parmi les relations lois des mailles ou lois des nœuds, choisir celle qui contient le terme dont on cherche l'évolution ;

5. **Moulinage METHODIQUE**
   réutiliser chacune des équations précédentes pour modifier un des termes - si cette opération n'est pas possible, dériver les relations des dipôles ou la longue relation puis retenter l'opération ;

Appliquons cette méthode !

1. **Définitions des grandeurs électriques**
   Sur le circuit de la figure 1, il manque la tension aux bornes de la résistance (en convention récepteur) et le courant électrique que l'on rajoute sur le schéma.
   Attention ! On utilise des noms explicites !!



2. **Relation des dipôles**
   On écrit les relations des deux dipôles. D'abord la loi d'Ohm
   $$U_R(t) = Ri(t) \ ; \tag{1.1}$$
   puis la relation fondamentale du condensateur que l'on dérive immédiatement
   $$q(t) = CU_C(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dq(t)}{dt} = i(t) = C\frac{dU_C(t)}{dt} \ . \tag{1.2}$$
   > ***Remarque :*** *Pour un condensateur, on utilise toujours la relation entre le courant et la dérivée de la tension. La relation entre la charge et la tension n'est jamais utile lors d'une mise en équation électrique.*

   Attention ! Toutes ces relations sont vraies uniquement si les tension aux bornes de la résistance et du générateur sont en convention récepteurs !!

3. **Equations électriques**
   Le circuit est constitué d'une seule maille et d'aucun nœuds. On applique la loi des mailles et il vient
   $$E_0 = U_C(t) + U_R(t) \ . \tag{1.3}$$

4. **Initialisation**
   On repart de la loi des mailles :
   $$E_0 = U_C(t) + U_R(t)$$

5. **Moulinage METHODIQUE**
   on remplace la tension $U_R(t)$ en utilisant la relation (1.1), il vient
   $$E_0 = U_C(t) + Ri(t) \ . \tag{1.4}$$
   On remplace le courant à l'aide de la relation (1.2), il vient
   $$E_0 = U_C(t) + RC\frac{dU_C(t)}{dt} \ .$$

6. **Forme canonique**
   On réécrit l'équation différentielle pour avoir un coefficient 1 devant le terme avec la dérivée la plus haute et il vient au final **l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** électrique de la charge d'un condensateur
   $$\boxed{\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{E}{RC}} \ . \tag{1.5}$$
   La fonction U_C est la fonction inconnue.

2 Equation différentielle linéaire à coefficient constant

2.1 Definition et vocabulaire

▶ Introduction

L'étude physique que nous avons mené à conduit à l'équation suivante :

$$E_0 = U_\mathrm{C}(t) + RC\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Cette relation fait intervenir la fonction U_C du temps et ses dérivées successives. Elle porte le nom d'**équation différentielle**. L'inconnue (*i.e.* ce qu'on cherche) est **une fonction** (ici du temps t), et non un simple nombre.

Attention ! Si on cherche la tension U_C la réponse n'est donc JAMAIS :

$$U_\mathrm{C}(t) = E - RC\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$$

comme dans le cas d'une équation algébrique du type : $ax + b = 0$.

Attention ! Il est courant de ne pas préciser la variable temporelle dans les équations. On note U_C plutôt que $U_\mathrm{C}(t)$

▶ Un peu de vocabulaire

Cette équation est une équation :

- ▷ différentielle : elle fait intervenir une fonction et ses dérivée
- ▷ linéaire : la fonction inconnue ainsi que ses dérivée sont à la puissance 1
- ▷ à coefficient constant : les coefficient devant U_C et ses dérivées sont des nombres constants.
- ▷ d'ordre 1 : la dérivée la plus haute est $\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$.

  Il n'y a pas de $\frac{\mathrm{d}^2U_\mathrm{C}}{_d dt^2}$, ...

On la notera EDLCC d'ordre 1.

> **Définition. Forme canonique**
> Une équation différentielle est dite sous forme canonique lorsque le coefficient devant la dérivée la plus haute est 1.

> *Exemple 2 :*
> - ▷ $\frac{dU_C}{dt}(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = \frac{E}{RC}$: *OUI*
> - ▷ $U_C(t) = E - RC\frac{dU_C}{dt}(t)$: *NON*

Convention d'écriture :

Par habitude, on écrit généralement tous les termes faisant intervenir la fonction inconnues et ses dérivées à gauche de l'égalité.

On appelle membre de droite, le ou les termes ne faisant intervenir ni la fonction recherchée ni ses dérivées.

> **Définition. Equation homogène**
> L'équation homogène, associée à une équation différentielle, est la même équation mais en prenant le membre de droite égal à zéro.

Exemple 3 : Ici : $\frac{dU_C}{dt}(t) + \frac{1}{RC}U_C(t) = 0$

2.2 Méthode de résolution

Propriété. Décomposition de la solution
La solution u d'une équation différentielle linéaire s'écrit toujours comme la somme de deux termes :

$$U = U_P + U_H$$

avec :
- ▷ U_P **UNE solution particulière**
- ▷ U_H **LA forme générale** des solution de **l'équation homogène**

▶ Méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire

Attention ! Outil indispensable !

Méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants (EDLCC) :

1. **écrire l'équation différentielle sous forme canonique**
   On pensera à introduire des constante pertinente (τ, ω_0, Q, ...)

2. **décomposer la fonction solution de l'équation différentielle** en :
   - ▷ UNE solution particulière (indice P)
   - ▷ LA forme générale des solution de l'équation homogène, (indice H)

3. **trouver la solution particulière**
   On la cherchera le plus souvent sous forme d'une fonction constante qui est solution de l'équation différentielle.

4. **donner la forme générale des solutions de l'équation homogène.**
   Ces formes générales sont des résultats mathématiques qu'on admettra par coeur en physique.
   Elle devra faire apparaître une ou plusieurs constantes inconnues.
5. **écrire la solution du problème comme la somme des deux**
6. **Appliquer les conditions initiales** pour trouver les constantes inconnues.

2.3 Application à la charge du condensateur

Reprenons le problème de la charge du condensateur. L'étude physique nous avait fourni l'équation :

$$E_0 = U_\mathrm{C}(t) + RC\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} .$$

1. **Forme canonique et introduction des constantes**

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}U_\mathrm{C}(t) = \frac{E}{RC} .$$

Pour une EDLCC d'ordre 1, on définit la **constante de temps** τ du système comme l'inverse du coefficient devant la fonction dans l'équation différentielle.
Ici : $\tau = RC$ et l'équation différentielle donne :

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U_\mathrm{C}(t) = \frac{E}{\tau} .$$

Intérêt pratique de τ :
▷ toutes les EDLCC d'ordre 1 auront la même équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f = 0$$

et donc la même solution homogène.
La spécificité du problème est comprise dans le coefficient τ.
▷ le temps τ donne une échelle de temps pour le problème. On l'appelle aussi le **temps caractéristique**.
Les variations de la fonction se fera sur un intervalle entre 0 et 5τ.

2. **Décomposition :**

$$U_\mathrm{C}(t) = U_{\mathrm{C},P}(t) + U_{\mathrm{C},H}(t)$$

Attention ! Cette étape peut paraître anodine mais elle permet de ne pas oublier l'une des deux partie de la solution.
De plus cela permet de ne pas faire d'erreur bête, ce qui arrive en DS.

3. **Solution particulière**
On va cherche la solution $U_{\mathrm{C},P}$ sous la forme d'une constante : $U_{\mathrm{C},P}(t) = K$.
L'intérêt est que $\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C},P}}{\mathrm{d}t} = 0$. L'équation se réduit alors à :

$$\frac{1}{\tau}K = \frac{E}{\tau} \text{ donc } K = E$$

Une solution particulière est donc : $U_{\mathrm{C},P}(t) = E$.

Attention ! à la distinction **inconnue** et **constante du problème** !!
▷ E est une constante du problème.
Elle est introduite dans l'énoncé et sa valeur c'est une donnée même si on se connaît pas sa valeur numérique.
▷ K est une inconnue. Elle n'est pas introduite dans l'énoncé et on a pu lui affecter une valeur.
Astuce pratique : si une grandeur est introduite par vos soin, c'est généralement une inconnue.
On peut donner à une inconnue n'importe quel nom alors que le nom d'une constante est donné dans l'énoncé.

4. **Solution homogène**
On écrit l'équation homogène associée :

$$\frac{\mathrm{d}U_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}U_\mathrm{C}(t) = 0$$

Propriété. Forme générale des solution homogène d'une EDLCC d'ordre 1
Les solutions de l'équation différentielles :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = 0$$

sont de la forme

$$f(t) = A\exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

avec A une constante inconnue.

On a ici : $U_{\mathrm{C},H} = A\exp\left[-\frac{t}{\tau}\right] = A\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$

| ***Remarque :*** *On peut conserver la forme avec* τ.

5. **Solution du problème et conditions initiales**
La tension aux bornes du condensateur est donc :

$$U_{\mathrm{C}} = E + A\exp\left[-\frac{t}{RC}\right]$$

Attention ! Ce n'est pas fini : la constante A est une inconnue qu'il s'agit de trouver ! !
On utilise pour cela les **conditions initiales** !

2.4 Condition initiale : valeurs des grandeurs électriques à $t = 0$

Pour résoudre le problème, il est nécessaire de connaître la valeur de la grandeur que l'on cherche à $t = 0$ pour résoudre le problème.

Attention ! La plupart des erreurs découlent de cette partie !

▶ Notion de deux états initiaux à $t = 0$

On se place à l'instant initial, à $t = 0$ et on ferme l'interrupteur. L'interrupteur est-il ouvert ou fermé à $t = 0$?

On ne peut pas répondre mais on peut dire que :

- ▷ juste **avant** $t = 0$, l'interrupteur est ouvert
- ▷ juste **après** $t = 0$, l'interrupteur est fermé

On note le premier instant $t = 0^-$ et le second $t = 0^+$.

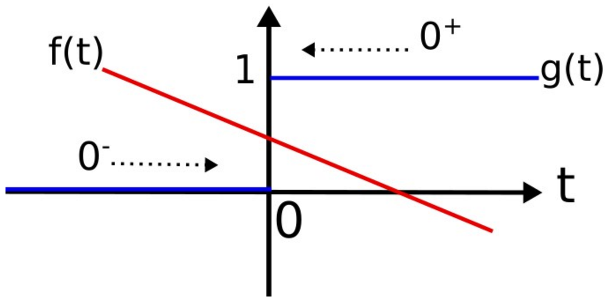
Distinction $t = 0^-$ et $t = 0^-$

On trace la fonction g qui vaut 0 quand l'interrupteur est ouvert et 1 quand il est fermé.

On remarque que

- ▷ $g(0^-) = 0$
- ▷ $g(0^+) = 1$

la fonction g est discontinue en zéro.



A priori, toutes les grandeurs électriques peuvent être discontinues.

Quel est le problème ?

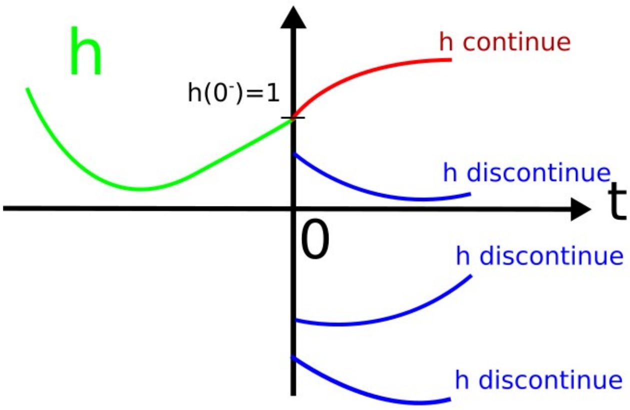
Prenons une fonction h quelconque. Je connais son tracé sur les temps négatifs et notamment $h(t = 0^-) = 1$. Que vaut h en $t = 0^+$?

- ▷ si h est continue, je peux trouver

$$h(0^+) = h(0^-) = 1$$

- ▷ si h est discontinue, c'est impossible

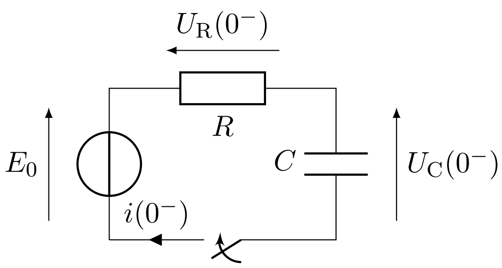
$$h(0^+) = ???$$



- ▷ pour une grandeur continue, je peux directement relié l'état juste avant et l'état juste après
- ▷ pour une grandeur discontinue, je ne peux rien dire sur sa valeur juste après même si je connais sa valeur juste avant

▶ Lien avec le circuit électrique

A $t = 0^-$ on a le circuit suivant :



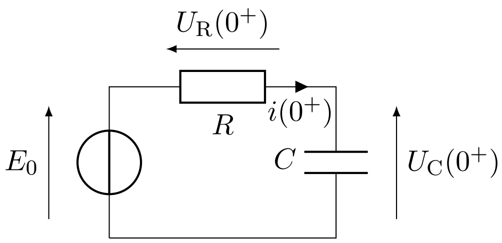
A cet instant, l'interrupteur est ouvert depuis longtemps. Le circuit n'a pas été modifié :

$$i(0^-) = 0$$

$$U_C(0^-) = 0$$

$$U_R(0^-) = 0$$

A $t = 0^+$, l'interrupteur est fermé, on a donc le circuit :



A $t = 0^+$ on a modifié le circuit de façon brutale. On ne peut *a priori* rien dire sur les valeurs des différents grandeurs électriques $i(0^+)$, $U_R(0^+)$ **car on ne saît pas si elles sont continues ou discontinues**.

MAIS on sait que la tension est continue aux bornes d'un condensateur. Donc :

$$U_C(0^+) = U_C(0^-) = 0$$

Attention ! C'est la seule dont on peut trouver ainsi la valeur ! !
Une fois $U_C(0^+)$, on peut utiliser les lois des noeuds et des dipôles pour trouver les autres si nécessaire.

▶ Echelon de tension

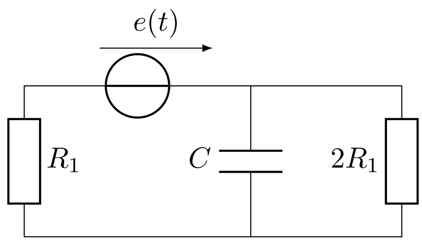
Un générateur de tension génère un **échelon de tension** si la tension à ses bornes vaut :

- ▷ 0 pour $t < 0$
- ▷ E_0 pour $t > 0$

La tension aux bornes du générateur est une fonction discontinue si bien que toutes les autres grandeurs électriques du circuit sont a priori discontinue.
On doit alors refaire la même analyse que précédemment.

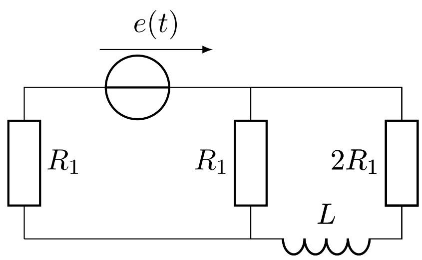
Application 1 : ***Attention ! TRES IMPORTANTE ! !***

Le générateur fournit un échelon de tension $e(t)$: la tension passe de 0 à E_0 à $t = 0$.
Donner toutes les grandeurs électriques du circuit aux instants ;
- ▷ $t = 0^-$
- ▷ $t = 0^+$



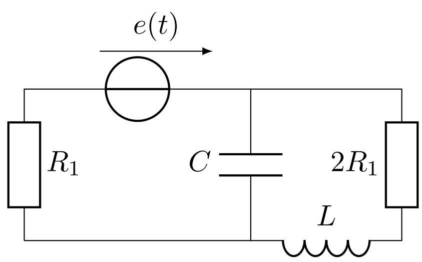
Application 2 : ***Attention ! TRES IMPORTANTE ! !***

Le générateur fournit un échelon de tension $e(t)$: la tension passe de 0 à E_0 à $t = 0$.
Donner toutes les grandeurs électriques du circuit aux instants ;
- ▷ $t = 0^-$
- ▷ $t = 0^+$



Application 3 : ***Attention ! TRES IMPORTANTE ! !***

Le générateur fournit un échelon de tension $e(t)$: la tension passe de 0 à E_0 à $t = 0$.
Donner toutes les grandeurs électriques du circuit aux instants ;
- ▷ $t = 0^-$
- ▷ $t = 0^+$



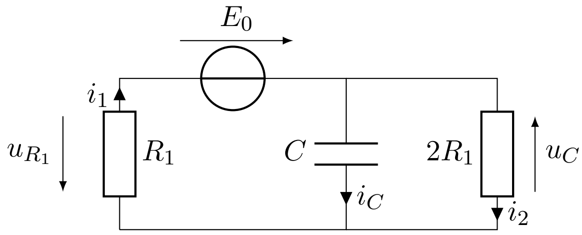
CORRECTION

Valeurs à $t = 0$
Initialement, le générateur est éteint : le circuit n'est pas alimenté, donc toutes les grandeurs électriques sont nulles.

Méthode en DS. Etude de l'état initial
On commence par faire un schéma propre avec **TOUTES** les grandeurs élecctriques apparentes puis on écrit les lois
- ▷ des noeuds et des mailles
- ▷ les lois d'Ohm
- ▷ les relations de continuité (tension d'un condensateur et intensité d'une bobine)

Application 1
On introduit toutes les grandeurs électriques à $t = 0^+$ (*on ne précise pas le temps mais $i_1 = i_1(0^+)$, $u_C = u_C(0^+)$, ...).*
On remarque que le condensateur C et la résistance $2R_1$ sont en parallèles, on introduit une seule tension.

- ▷ **Loi des mailles :** $E_0 + u_C - U_{R_1} = 0$
- ▷ **Loi des nœuds :** $i_1 = i_C + i_2$
- ▷ **Loi d'Ohm** : $u_{R_1} = R_1 i_1$ et $u_C = 2R_1 i_2$.
- ▷ **Relation de continuité :** la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps : $u_C = u_C(0^-) = 0$.

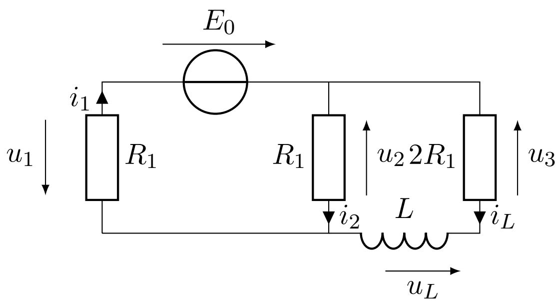


Méthode en DS. Trouver les valeurs initiales des grandeurs électriques
On part des grandeurs données par les relations de continuité (tension d'un condensateur et intensité d'une bobine), et on remonte à partir de ces dernières à toutes les autres grandeurs.

On trouve alors que :
- ▷ $u_{R_1} = E_0 + u_C = E_0$ (*loi des mailles*)
- ▷ $i_2 = u_C/2R_1 = 0$ (*loi d'Ohm*)
- ▷ $i_1 = u_{R_1}/R_1 = E_0/R_1$ (*loi d'Ohm*)
- ▷ $i_C = i_1 - i_2 = E_0/R_1$(*loi des nœuds*)

Application 2
On introduit toutes les grandeurs électriques à $t = 0^+$.

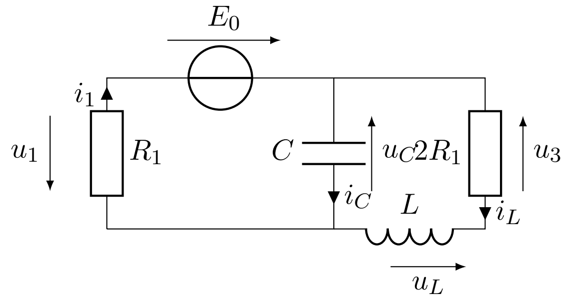
- ▷ **Loi des mailles :**
$E_0 - u_2 - u_1 = 0$ et $u_2 - u_3 - u_L = 0$
- ▷ **Loi des nœuds :** $i_1 = i_2 + i_L$
- ▷ **Loi d'Ohm** : $u_1 = R_1 i_1$; $u_2 = R_1 i_2$ et $u_3 = 2R_1 i_L$
- ▷ **Relation de continuité :** l'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps : $i_L = i_L(0^-) = 0$.



On trouve alors que :
- ▷ $u_3 = R_3 i_L = 0$ (*loi d'Ohm*)
- ▷ $i_1 = i_2$ (*loi des noeuds*)
- ▷ $E_0 = R_1 i_2 + R_1 i_1 = 2R_1 i_1$ donc $i_1 = E_0/2R_1$ (*loi d'Ohm+loi des mailles*)
- ▷ $u_1 = E_0/2$ et $u_2 = E_0/2$ (*loi d'Ohm*)
- ▷ $u_L = u_2 = E_0/2$ (*loi des mailles*)

Application 3

On introduit toutes les grandeurs électriques à $t = 0^+$.



- ▷ **Loi des mailles :**
  $E_0 - u_C - u_1 = 0$ et $u_C - u_3 - u_L = 0$
- ▷ **Loi des nœuds :** $i_1 = i_C + i_L$
- ▷ **Loi d'Ohm** : $u_1 = R_1 i_1$ et $u_3 = 2R_1 i_L$
- ▷ **Relation de continuité :**
  l'intensité dans une bobine est une fonction continue du temps : $i_L = i_L(0^-) = 0$.
  La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps : $u_C = u_C(0^-) = 0$

On trouve alors que :

- ▷ $u_3 = R_3 i_L = 0$ *(loi d'Ohm)*
- ▷ $i_1 = i_C$ *(loi des noeuds)*
- ▷ $E_0 = R_1 i_2 + u_C = R_1 i_1$ donc $i_1 = E_0/R_1$ *(loi d'Ohm+loi des mailles)*
- ▷ $u_1 = R_1 E_0/R_1 = E_0$ *(loi d'Ohm)*
- ▷ $u_L = u_C - u_3 = 0$ *(loi des mailles)*

▶ Retour sur la charge du condensateur

On a trouvé :

$$\text{a t=0, } U_\mathrm{C}(t)0) = 0$$

Or on sait exprimer également $U_\mathrm{C}(t=0)$ grâce à la formule exprimée précédemment : $U_\mathrm{C}(t=0) = E + A$.

Les deux expressions doivent être vraies, donc $E + A = 0$ soit $A = -E$.

On conclut en encadrant la solution

$$\boxed{U_\mathrm{C}(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))}\ . \tag{2.1}$$

▶ Discussion sur la solution

Pour discuter d'une solution obtenue, quand celle-ci est une fonction, il est très utile de tracer son graphe :

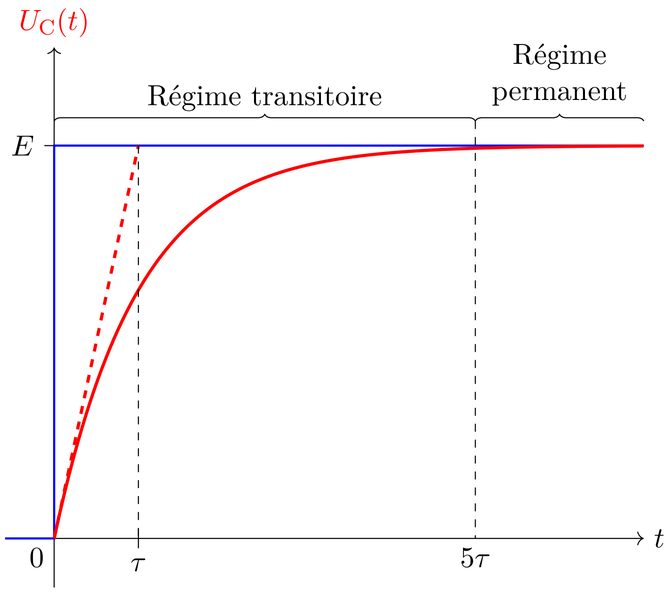


Fig. 4 – À $t = 0$, le générateur fournit une tension E. Le condensateur est initialement déchargé et il se charge au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, la tension ne varie plus. Il s'agit de la **réponse du condensateur à un échelon de tension**.

Les trois remarques suivantes doivent toujours être tracées sur le graphe :

- ▷ la pente à l'origine croise la solution du régime permanent après un temps τ ;
- ▷ pour le temps $t = \tau$, la fonction a atteint 63 % de sa valeur finale ;
- ▷ après environ 5τ, on admet que la solution est égale à celle du régime permanent. En effet, $\exp(-5) \approx 0.006$ que l'on considère comme nul.

3 Bilans énergétiques

Comme nous l'avons vu, la grandeur que l'on paie à EDF n'est pas la tension mais la puissance électrique. On va s'intéresser ici à la répartition de la puissance électrique dans le circuit, aussi appelé **bilan de puissance**.

3.1 Bilan de puissance

▶ Approche qualitative

Le circuit est composé de trois dipôle : un générateur, une résistance et un condensateur. On peut *a priori* se dire que :

- ▷ le générateur va fournir de la puissance au circuit
- ▷ une partie de cette puissance va être transférée au condensateur
- ▷ le reste est dissipée par effet Joule dans la bobine

Objectif : quelle pourcentage de l'énergie du générateur sert réellement à charger le condensateur ?

▶ Méthode du bilan de puissance

Propriété. Bilan de puissance
Pour obtenir un bilan de puissance sur une mailler fermée, on multiplie une loi des mailles par l'intensité qui la traverse.

Appliquons cette méthode pour le système étudié. Reprenons la loi des mailles :

$$E(t) = U_{\mathrm{C}}(t) + Ri(t)\ .$$

Multiplions cette équation par $i(t)$, l'intensité qui la traverse, il vient

$$E_0 i(t) = U_{\mathrm{C}}(t)i(t) + Ri(t)^2\ .$$

Attention ! Ici c'est facile mais on prendra garde à bien utiliser l'intensité qui circule dans la maille !

On reconnaît :

- ▷ à droite la puissance fournie par le générateur car il est en convention générateur
- ▷ à gauche les puissances reçues par la résistance et le condensateur

On remarque alors qu'il n'y a pas de perte : toute la puissance fournie par le générateur se retrouve dans les dipôle.

Or on sait que $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}$ d'où

$$E_0 i(t) = CU_{\mathrm{C}}(t)\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t)^2\ .$$

♡*Instant math* ♡ : $f(t) \times f'(t) = (f^2(t)/2)'$

Il vient alors :

$$E_0 i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right) + Ri(t)^2\ .$$

On reconnaît donc le **bilan de puissance**

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{J}}(t)}\ . \tag{3.1}$$

Propriété. Conservation de la puissance électrique
Dans un circuit électrique la puissance électrique se conserve.

▶ Interprétation

A chaque instant t :
- ▷ le générateur fournit une puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t) = Ei(t) > 0$.
  C'est cette puissance qu'on paie à EDF.
- ▷ le condensateur reçoit une partie de cette puissance électrique qu'il transforme en énergie électrostatique.
- ▷ le reste de la puissance est dissipée par effet Joule : le circuit chauffe.
  C'est le terme de perte.

Propriété. Lors de la charge du condensateur, de l'énergie est stockée dans celui-ci. L'énergie électrostatique augmente : le condensateur a un caractère récepteur.

Le bilan de puissance nous indique ce qu'on doit payer à chaque instant. Pour savoir ce qu'on devra payer en tout, il faut réaliser un bilan d'énergie.

3.2 Bilan d'énergie

▶ Analogie Energie-Facture

A chaque instant t, on paie à EDF une quantité proportionnelle à la puissance fournie par le générateur. A la fin de la manipulation, ce qu'on va payer à EDF sera égale à :
- ▷ ce qu'on lui doit à $t = 0s$ $Ei(t = 0.1)$
- ▷ plus ce qu'on lui doit à $t = 0.1\text{s}$: $+Ei(t = 0.2)$
- ▷ plus ce qu'on lui doit à $t = 0.2\text{s}$: $+Ei(t = 0.3)$
- ▷ ...

Autrement dit, on doit à EDF à la fin de la charge du condensateur :

$$Ei(t = 0.1) + Ei(t = 0.2) + Ei(t = 0.3) + Ei(t = 0.4) + ... = \sum Ei(t)$$

En physique, une somme infini est une intégrale. On devra à EDF une quantité égale à :

$$\int_{t=0}^{\infty} Ei(t)\mathrm{d}t$$

Cette grandeur, argent mis à part, est ce qu'on appelle l'énergie.

Propriété. Puissance et énergie d'un dipôle
Un dipôle traversé par une intensité $i(t)$ et soumis à une tension $u(t)$ en convention récepteur reçoit une puissance électrique :

$$\mathcal{P}_{reçue} = u(t)i(t)$$

Entre deux instant t_1 et t_2, le dipôle reçoit une énergie :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\mathrm{d}t$$

On a donc le lien entre puissance et énergie électrique :

$$E = \int \mathcal{P}\mathrm{d}t \text{ ou } \mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Attention ! $\mathcal{P}$ est en Watt(W) et E est en Joule (J)

▶ Bilan d'énergie

On calcule les différentes énergies.

▷ **Énergie du condensateur**

L'énergie stockée dans le condensateur est la plus simple à calculer, en effet, on sait que la puissance vaut en chaque instant

$$\mathcal{P}_{\mathrm{C}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right]$$

Donc

$$E_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right]$$

On simplifiera les notations en mettant $\int_0^{+\infty}$.

$$E_C = \left[\frac{1}{2}CU_{\mathrm{C}}(t)^2\right]_0^{\infty}$$

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 - 0$$

L'énergie du condensateur est initialement nulle car il est déchargé.

On a une énergie finale stockée $\boxed{E_{\mathrm{C,finale}} = \frac{1}{2}CE^2}$.

▷ **Énergie fournie par le générateur**

L'énergie fournie par le générateur vaut

$$E_G = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t)$$

soit en calculant

$$E_G = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ E_0 i(t) = E_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ i(t)$$

Pour continuer le calcul, il faut connaître $i(t)$ l'intensité qui circule dans le circuit. On sait que : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$.

$$E_G = EC \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} = EC\left[U_{\mathrm{C}}(t)\right]_0^{+\infty}\ ;$$

$$E_{\mathrm{fournie}} = CE(E-0)$$

et donc

$$\boxed{E_{\mathrm{fournie}} = CE^2}$$

▷ **Effet Joule**

L'énergie dissipée dans la résistance par effet Joule

$$E_{\mathrm{J}} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathcal{P}_{\mathrm{J}}(t)$$

En intégrant le bilan de puissance entre $t = 0$ et $t = +\infty$, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{G}}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} + \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{\mathrm{J}}(t)$$

On reconnaît les différent terme précédents

$$E_{\mathrm{J}} = E_{\mathrm{fournie}} - E_{\mathrm{C,finale}} = \frac{1}{2}CE_0^2$$

Propriété. Bilan d'énergie
Pour obtenir un bilan d'énergie, on intègre le bilan de puissance.

> ***Application 4 :*** *On peut retrouver l'énergie dissipée par effet Joule par un calcul direct. Pour cela :*
> 1. *exprimer l'intensité du courant électrique $i(t)$ qui circule dans la maille en fonction de E, R et C*
>   *Astuce : on se servira de $U_C(t)$ trouvée et de la relation du condensateur*
> 2. *calculer $E_J = \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_J(t)dt$ à l'aide de l'expression de $i(t)$ trouvée précédemment.*

On remarque qu'exactement la moitié de l'énergie fournie par le générateur est dissipée sous forme de chaleur dans la résistance. Cette dissipation est intrinsèque à la charge du condensateur et ne dépend pas de la valeur de celui-ci. La valeur de C modifie juste la constante de temps du processus, donc sa vitesse.

Propriété. Charger un condensateur est un processus qui provoque irrémédiablement la perte de la moitié de l'énergie fournie.

4 Application

4.1 La décharge du condensateur : Réponse en régime libre

▶ Position du problème

On étudie cette fois théoriquement le montage électrique ci-contre :
▷ l'interrupteur est fermé au temps $t = 0$;
▷ le condensateur est initialement chargé à la tension E_0.

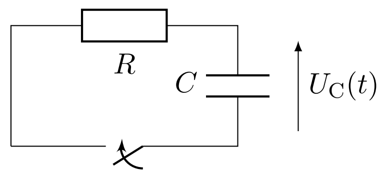


Fig. 5 – Schéma électrique de la décharge du condensateur.

▶ Mise en équation électrique et résolution de l'équation

Application 5 :

▷ *Sans aucun calcul, prévoir la valeur finale de la tension aux bornes du condensateur.*

▷ *Montrer que la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle*

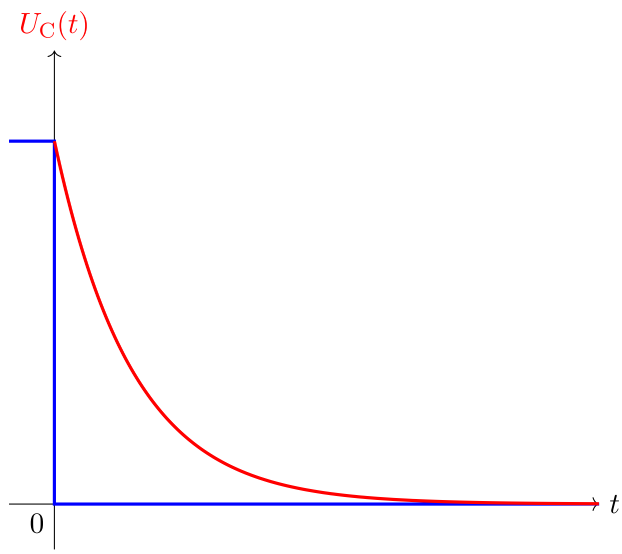
$$\frac{dU_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} U_C(t) = 0$$

avec la constante de temps $\tau = RC$.

▷ *Ensuite, en utilisant les conditions initiales et les propriétés du condensateur, montrez que*

$$U_C(t) = E_0 \exp(-t/\tau) \ .$$

▷*Cette fonction est tracée ce dessous. Préciser :*
▷ *Régime transitoire/Régime permanent*
▷ *Pente à l'origine*
▷ *sur l'axe des temps : τ et 5τ*



▶ Bilan énergétique

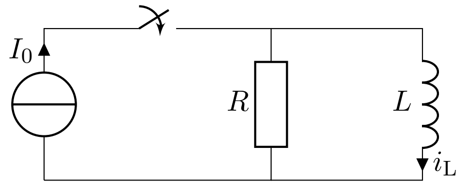
Application 6 : Réaliser un bilan de puissance et montrer que le condensateur a un caractère générateur. Calculer ensuite l'énergie dissipée dans la résistance.

4.2 Établissement d'un courant dans une inductance

En réutilisant les outils élaborés dans la première partie du chapitre, nous allons traiter un autre exemple impliquant une bobine.

▶ Présentation du problème

Étudions le circuit de la figure suivante. On s'intéresse à l'évolution du courant $i_{\mathrm{L}}(t)$ dans la bobine.



Un générateur de courant fournit le courant fixe I_0. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert. On le ferme à $t = 0$.

▶ Conditions initiales

- ▷ Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert et un régime permanent est atteint, la bobine se comporte donc comme un fil et : $i_{\mathrm{L}}(t < 0) = 0$. On a notamment :

$$i_{\mathrm{L}}(t = 0^-) = 0.$$

- ▷ A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
  A $t = 0^+$, l'interrupteur est fermé. On ne peut *a priori* rien dire sur les valeurs des différentes grandeurs électriques du circuit SAUF :

  L'intensité qui traverse une bobine est une fonction continue.

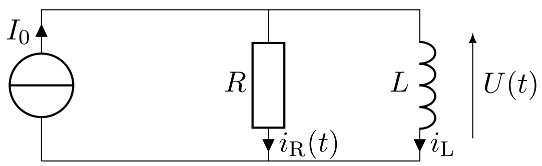
  Attention ! l'intensité pas la tension.
  - ▷ Bobine : intensité continue
  - ▷ Condensateur : tension continue

  Par conséquent : $i_{\mathrm{L}}(t = 0^+) = i_{\mathrm{L}}(t = 0^-) = 0$.

Le courant parcourant une bobine est une fonction continue, il va donc passer continument de 0 à sa valeur finale.

▶ Mise en équation électrique

Reproduisons d'abord la figure avec toutes les notations électriques nécessaires une fois l'interrupteur fermé.



La résistance vérifie la loi d'Ohm

$$U(t) = Ri_{\mathrm{R}}(t) \tag{4.1}$$

et la relation fondamentale de la bobine indique

$$U(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} . \tag{4.2}$$

La loi des nœuds implique

$$I_0 = i_{\mathrm{R}}(t) + i_{\mathrm{L}}(t) . \tag{4.3}$$

Dans cette équation, on remplace $i_{\mathrm{R}}(t)$ par $U(t)/R$ et il vient

$$I_0 = \frac{1}{R}U(t) + i_{\mathrm{L}}(t) .$$

Ensuite, on remplace la tension $U(t)$ par son expression et il vient

$$I_0 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + i_\mathrm{L}(t) \ .$$

La dernière étape consiste à mettre l'équation différentielle sous forme canonique et il vient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i_\mathrm{L}(t) = \frac{R}{L}I_0} \ . \tag{4.4}$$

De cette équation, on constate que le portait de phase de l'établissement du courant dans la bobine est le même que celui de la charge du condensateur.

► **Résolution**

▷ **Définition de la constante de temps τ**

On pose la constante de temps $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$ et l'équation différentielle (4.4) s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_\mathrm{L}(t) = \frac{1}{\tau}I_0 \ .$$

▷ **Solution générale de l'équation homogène** :

$$i_1(t) = C\exp(-t/\tau)$$

avec C une constante.

▷ **Solution particulière :**

Cette équation est à second membre constant constant. On pose $i_2(t) = K$ cette constante. On injecte cette solution dans l'équation. La dérivée d'une constante est nulle et on a donc

$$i_2(t) = I_0 \ .$$

▷ **Solution de l'équation différentielle :**

$$i_\mathrm{L}(t) = i_1(t) + i_2(t) = C\exp(-t/\tau) + I_0 \ .$$

▷ **Conditions initiales :**

on utilise le fait que **le courant à travers une bobine est une fonction continue du temps**, et donc $0 = i_\mathrm{L}(0^-) = i_\mathrm{L}(0^+) = i_\mathrm{L}(0)$. On utilise cette condition dans la solution générale et $0 = C + I_0$ soit $C = -I_0$.

▷ **Solution et tracé de graphe**

La solution finale de cette équation est

$$\boxed{i_\mathrm{L}(t) = I_0(1 - \exp(-t/\tau))} \ . \tag{4.5}$$

On remarque que l'on retrouve bien les comportements qualitatifs du paragraphe **??**.

▷ On peut tracer la solution sur un graphique figure 6.

► **Aspects énergétiques**

À nouveau, reprenons la méthode.

Réécrivons donc la loi des nœuds :

$$I_0 = i_\mathrm{R}(t) + i_\mathrm{L}(t)$$

qu'il faut multiplier par la tension pour obtenir

$$I_0 U(t) = i_\mathrm{R}(t)U(t) + i_\mathrm{L}(t)U(t) \ .$$

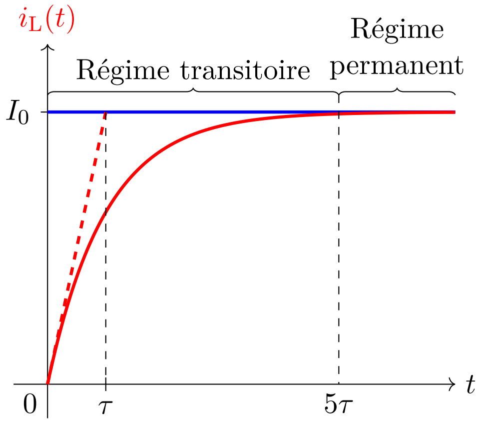


Fig. 6 – À $t=0$, le générateur fournit le courant I_0. Le courant dans la bobine est initialement nul et il s'établit au cours du régime transitoire. Pendant le régime permanent, le courant ne varie plus.

Utilisons maintenant les liens entre tensions et courant données par les relations des dipôles. Il vient

$$I_0 U(t) = R i_\mathrm{R}(t)^2 + L i_\mathrm{L}(t)\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} \,.$$

On reconnaît $L i_\mathrm{L}(t)\dfrac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}L i_\mathrm{L}^2(t)\right)$.

On reconnaît donc au final

$$\boxed{\mathcal{P}_\mathrm{G}(t) = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_\mathrm{J}(t)} \tag{4.6}$$

avec $E_\mathrm{L}(t)$ l'énergie magnétique stockée dans la bobine et $\mathcal{P}_\mathrm{J}(t)$ la puissance stockée par effet Joule.

La puissance fournie par le générateur est donc en partie transférée sous forme énergie stockée dans la bobine et en partie dissipée par effet Joule dans la résistance du circuit.

On peut alors calculer les différents termes énergétiques.

▷ L'énergie stockée dans la bobine vaut

$$E_{\mathrm{L,stockée}} = E_\mathrm{L}(t=+\infty) - E_\mathrm{L}(0) = \frac{1}{2}L I_0^2 \,.$$

▷ L'énergie fournie par le générateur vaut

$$E_\mathrm{G} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ I_0 U(t) = I_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L I_0 \left[i_\mathrm{C}(t)\right]_0^{+\infty} = L I_0^2 \,.$$

▷ L'énergie dissipée par la résistance vaut, en utilisant le bilan de puissance,

$$E_\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathcal{P}_\mathrm{J}(t) = E_\mathrm{G} - E_{\mathrm{L,stockée}} = \frac{1}{2}L I_0^2 \,.$$

À nouveau, de façon intrinsèque au phénomène de stockage de l'énergie, la moitié de l'énergie fournie est perdue par effet Joule.