TD05 Circuits linéaires du premier ordre

Lycée Louis Thuillier - Physique-Chimie - PCSIB

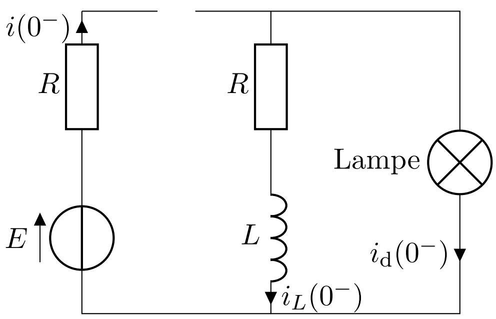
Exercice 1 - S'entrainer avec les conditions initiales et le régime permanent :

1. **Il est très important de bien distinguer $t = 0^-$ et $t = 0^+$! !**
   - ▷ $t = 0^-$: juste avant qu'on ferme l'interrupteur
   - ▷ $t = 0^+$: juste après qu'on ait fermé l'interrupteur

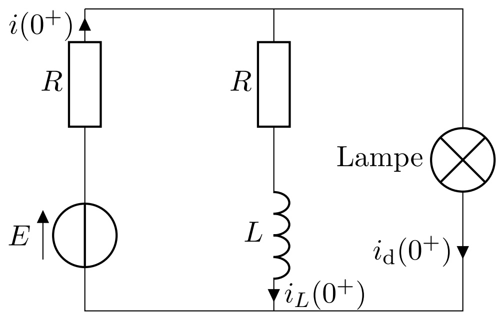
> **Méthode en DS. Trouver les conditions initiales**
> - ▷ on réalise deux **deux DEUX** schémas à $t = 0^-$ et $t = 0^+$ avec toutes les grandeurs électriques
> - ▷ on trouve les différentes tensions/intensité en 0^- des **grandeurs continues** (les autres sont inutiles)
> - ▷ pour $t = 0^+$, on écrit les lois des mailles/lois de noeuds/loi d'Ohm
> - ▷ on donne les relations de continuité dans les condensateur et bobines
> - ▷ **ET C EST TOUT**

$t = 0^-$

A $t = 0^-$, le circuit n'est pas connecté au générateur, toutes les intensités électriques sont nulles.



$t = 0^+$



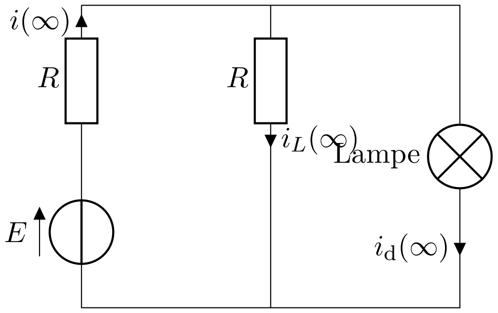
A $t = 0^+$, on a :

- ▷ 2 loi des mailles (en introduisant directement les loi d'Ohms) : $E - Ri(0^+) - Ri_L(0^+) + u_L(0^+) = 0$ et $Ri_L(0^+) + u_L(0^+) - 4Ri_{\mathrm{d}}(0^+) = 0$
- ▷ une loi des nœuds : $i(0^+) = i_L(0^+) + i_{\mathrm{d}}(0^+)$
- ▷ relation de continuité : le courant dans une bobine est une fonction continue du temps donc $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

On trouve alors que :
- ▷ $E = Ri(0^+) + u_L(0^+)$
- ▷ $i_{\mathrm{d}}(0^+) = i(0^+)$
- ▷ $u_L(0^+) = 4Ri_{\mathrm{d}}(0^+)$

Finalement $E = Ri(0^+) + 4Ri(0^+)$ donc $i(0^+) = E/5$ et $i_{\mathrm{d}}(0^+)E/5$.

2. Pour étudier le régime permanent, on représente le circuit pour $t = +\infty$ en remplaçant les bobines et condensateurs par leurs dipôles équivalent.

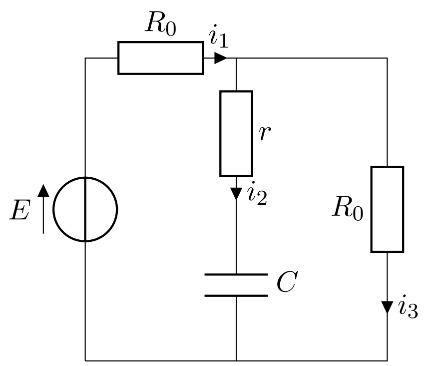


En associant les différentes résistances du circuit, on trouve un résistance totale équivalente de $R_{tot} = \frac{4}{5}R + R = \frac{9}{5}R$ donc un courant $i(\infty) = \frac{5}{9}\frac{E}{R}$.
Par un pont diviseur de courant on trouve : $i_L(\infty) = \frac{4}{5}i(\infty) = \frac{4E}{9R}$ et $i_\mathrm{d}(\infty) = \frac{1}{5}i(\infty) = \frac{E}{9R}$

3. On refait l'étude des conditions initiales comme avant mais désormais $i_L(0^-) = \frac{4}{9}\frac{E}{R}$. En refaisant tout l'étude on trouve : $i_L(0^+) = i_\mathrm{d}(0^+) = \frac{4}{9}\frac{E}{R}$ et $i(0^+) = 0$ interrupteur ouvert.
4. On remarque alors que les seules moment où le courant est suffisant dans la lampe pour permettre qu'elle s'allume est lorsque on ouvre on qu'on ferme l'interrupteur. La lampe est un indicateur visuelle : elle ne s'allume que lorsqu'on actionne l'interrupteur.

Exercice 2 - Circuit à deux mailles :

1. A $t > 0$, le circuit est équivalent à :



On appelle U_j la tension en convention récepteur aux bornes de la résistance R_j.
▷ **2 lois des mailles/loi d'Ohm** : $E = R_0 i_1 + r i_2 + U_C$ et $r i_2 + U_C = R_0 i_3$

▷ **1 loi des noeuds** : $i_1 = i_2 + i_3$

▷ **Relation des dipôles :** $i_2 = C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$

$$r i_2 + U_C = R_0 i_3 \Rightarrow rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = R_0 i_3 \;\Rightarrow rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = R_0(i_1 - i_2)$$

On remplace i_1 avec la première loi des mailles et i_2 comme avant :

$$i_1 = \frac{1}{R_0}\left(E - r i_2 - U_C\right) = \frac{1}{R_0}\left(E - rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} - U_C\right)$$

On a alors :

$$rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + U_C = R_0\frac{1}{R_0}\left(E - rC\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} - U_C\right) - R_0 C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t}$$

On a plus qu'à tout assembler :

$$(2r + R_0)\, C \frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + 2U_C = E$$

2.(a) Pour résoudre l'équation, on l'écrit **sous forme canonique** :

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{(2r + R_0)C} U_C = \frac{E}{(2r + R_0)C}$$

On a alors un temps caractéristique $\tau = (2r + R_0)C/2$. On peut ensuite résoudre : $U_C = U_P + \widetilde{U}$ avec :

- ▷ $\widetilde{U} = Ae^{-t/\tau}$ et A une constante d'intégration
- ▷ $U_P = K$ avec K une constante qu'on trouve à l'aide de l'équation différentielle :

$$0 + \frac{1}{\tau} K = \frac{E}{(2r + R_0)C} \;\Rightarrow\; K = E \frac{\tau}{(2r + R_0)C} = \frac{E}{2}$$

On a alors : $U_C(t) = Ae^{-t/\tau} + \dfrac{E}{2}$.

Condition initiale : $U_C(t = 0) = 0$, le condensateur est initialement déchargé et la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue.

Finalement : $U_C(t) = \dfrac{E}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

(b) On trouve la charge via $q(t) = CU_C(t) = \ldots$

(c) Pour i_2, pas besoin de repartir du début, on utilise la relation courant-tension d'un condensateur :

$$i_2 = C \frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{E}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = C \frac{E}{2} \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$$

Soit $i_2 = \dfrac{E}{2r + R_0} e^{-t/\tau}$.

Exercice 3 - Chute d'une balle dans un fluide :

Attention ! *Pas besoin de savoir faire de la mécanique ici : on doit juste savoir résoudre l'équation différentielle !*

1. **Attention !** En dimension on n'écrit jamais des sommes !!

   Ça $[m]\left[\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right] = [-\alpha v(t)] + [m][g]$ **JAMAIS**

   On a :

$$[-\alpha v(t)] = [m][g] \;\text{ et }\; [m]\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right] = [-\alpha v(t)]$$

   On utilise le premier : $[\alpha] = \dfrac{[m][g]}{[v]} = \dfrac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$.

2. On met un×1 devant la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m} = g \;\text{ et donc }\; \tau = \frac{m}{\alpha}$$

3. On résout l'équation : $v(t) = v_P + \widetilde{v}$
   - ▷ $v_P = \dfrac{mg}{\alpha}$
   - ▷ $\widetilde{v}(t) = Ae^{-t/\tau}$

   Donc $v(t) = \dfrac{mg}{\alpha} + Ae^{-t/\tau}$.

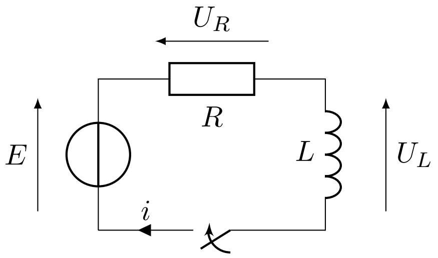
   Condition initiale : $v(t = 0) = v_0$ donc $A = v_0 - \dfrac{mg}{\tau}$.

   Finalement : $v(t) = \dfrac{mg}{\alpha} + \left(v_0 - \dfrac{mg}{\alpha}\right) e^{-t/\tau}$.

4. Aux temps longs, la vitesse vaut $v_\infty = \dfrac{mg}{\alpha}$. Deux cas alors :
   - ▹ $v_0 > \dfrac{mg}{\alpha}$: la balle ralentit dans le fluide et la vitesse de la balle est donc maximale $t = 0$
   - ▹ $v_0 < \dfrac{mg}{\alpha}$: la balla accélère dans le fluide et la vitesse de la balle est donc maximale $t = \infty$

Exercice 4 - Etincelle de rupture :

1. **Attention !** *à bien mettre en place les différentes étapes !!*



▹ **Loi des mailles** : $E = U_R + U_L$

▹ **Loi des dipôles** : $U_R = Ri$ et $U_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Donc $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{L}\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

et $\tau = \dfrac{L}{R}$.

On a alors $i(t) = i_P + \widetilde{i}$ avec $i_P = K = \dfrac{E}{R}$ et $\widetilde{i} = Ae^{-t/\tau}$.

Condition initiale : $i(t = 0) = 0$ car aucun courant ne circule initialement dans la bobine ($i(0^-) = 0$) et l'intensité dans une bobine est continue $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

Donc $i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.

2. En régime permanent $i_\infty = \dfrac{E}{R}$. Lorsqu'on ouvre l'interrupteur on force le courant à être nul. Or, l'intensité circulant dans une bobine est une fonction continue. Deux phénomènes s'oppose :
   - ▹ l'interrupteur qui force $i = 0$
   - ▹ la bobine qui force $i = E/R$

   Par conséquent, l'intensité reste continu mais décroit très rapidement. Il existe un court moment où l'interrupteur est ouvert mais un courant circule, formant un arc électrique.

Exercice 5 - Transfert de charge entre condensateurs (*) :

1. **Attention !** *L'énoncé est méchant : le condensateur C_2 est en convention récepteur, donc $i = -C_2\dfrac{du_2}{dt}$!!*

   En appliquant pas-à-pas la méthode on trouve :

$$u_2 = u_1 + Ri \text{ avec } i = C_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \text{ et } i = -C_2\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$$

Problème : c'est $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$ qui apparaît dans nos relations courant-tension, et pas u_1. On veut la déricée de u_1, on a u_1 donc on dérive !

$\Rightarrow$ on dérive la loi des mailles : $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On a alors :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + (1/C_1 + 1/C_2)i(t) \text{ et donc } \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}_{\frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}} i = 0$$

soit $\tau = RC_1C_2/(C_1 + C_2)$.

CI : $i(t = 0^+) = (U_{0,2} - U_{0,1})/R$ (*loi des mailles en $t = 0^+$*).

On a alors : $i(t) = \dfrac{U_{0,2} - U_{0,1}}{R}\exp[-t/\tau]$.

Pour trouver les tensions, deux méthodes :

▷ on applique pas-à-pas la méthode pour trouver les équations différentielles dont elles sont solution

▷ comme $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, il suffit d'intégrer l'expression de i trouvée précédemment pour avoir u_C.

Dans tous les cas on trouve :

$$u_1(t) = U_{01} - (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_2}{C_1+C_2}(\exp[-t/\tau]-1) \text{ et } u_2(t) = U_{02} + (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_1}{C_1+C_2}(\exp[-t/\tau]-1)$$

2. **Bilan d'énergie**
   - Énergie du condensateur 1 :

$$\mathcal{E}_{C_1} = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, u_1(t)i(t) = C_1\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\, u_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = C_1\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{u_1^2}{2}\right] \Rightarrow \mathcal{E}_{C_1} = C_1\left(\frac{u_{1,\infty}^2}{2} - \frac{U_{1,0}^2}{2}\right)$$

   avec $u_{1,\infty} = u_1(\infty) = U_{0,1} + (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_2}{C_1+C_2}$.

   - Énergie du condensateur 2 :

   avec un raisonnement similaire on trouve :

$$\mathcal{E}_{C_2} = C_2\left(\frac{u_{2,\infty}^2}{2} - \frac{U_{0,2}^2}{2}\right)$$

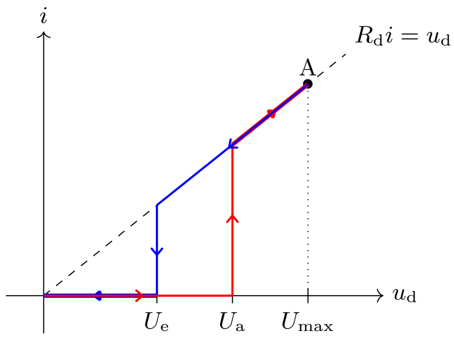
   avec $u_{2,\infty} = u_2(\infty) = U_{0,2} - (U_{0,2} - U_{0,1})\frac{C_2}{C_1+C_2}$.

$$\frac{1}{C_1}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t}q_C(t) = \frac{1}{2C_1}\left[q_1^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{C_1}{2}\left[u_1^2(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{C_1}{2}(u_\mathrm{f}^2 - U_{01}^2) < 0$$

   - Énergie dissipée par effet joule dans la résistance

$$E_\mathrm{J} = R\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t i(t)^2 = Ri_0^2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\, e^{-2t/\tau} = -\frac{\tau Ri_0^2}{2}\left[\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{\tau Ri_0^2}{2}$$

Exercice 6 - La lampe à décharge(**) :



1. Voir figure ci-contre. En rouge on allume la lampe et en bleu on l'éteint.

2. Pendant la phase de charge et tant que $U_\mathrm{d}(t) < U_\mathrm{a}$ on est en présence d'un circuit RC classique car la lampe se comporte alors comme un interrupteur ouvert (résistance infinie). On prend une convention récepteur pour la résistance et la capacité et on note $i(t)$ le courant dans la maille. La tension U_d est ici la tension aux bornes du condensateur. Ainsi, il vient directement $E = RCU_\mathrm{d}' + U_\mathrm{d}$.
   Compte tenu de la condition initiale $U_\mathrm{d}(0) = 0$ et de la continuité de la tension aux bornes du condensateur, cette équation s'intègre en $U_\mathrm{d}(t) = E\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)\right]$.

3. Pour que la lampe s'allume on doit avoir $U_\mathrm{d} > U_\mathrm{a}$ et donc $E > U_\mathrm{a}$. Par définition $U_\mathrm{d}(T_\mathrm{a}) = U_\mathrm{a}$ soit $T_\mathrm{a} = RC\ln\left(\dfrac{E}{E - U_\mathrm{a}}\right)$.

4. Pour $t > T_\mathrm{a}$ la loi des mailles fournit encore $E = Ri + U_\mathrm{d}$; mais cette fois-ci on a $i(t) = CU_\mathrm{d}' + U_\mathrm{d}/R_\mathrm{d}$ (en prenant en compte le courant qui passe dans chaque partie d ela maille). On obtient donc $E = RCU_\mathrm{d}' + U_\mathrm{d}(R_\mathrm{d} + R)/R_\mathrm{d}$.
   Cette équation différentielle est du premier ordre à coefficient constant avec second membre et la solution est donc la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène sans second membre. En posant $\tau_\mathrm{e} = (R_\mathrm{d}RC)/(R_\mathrm{d} + R)$, U_d est de la forme : $U_\mathrm{d}(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau_\mathrm{e}}\right) + \dfrac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d} + R}$ et au temps $t = T_\mathrm{a}$ on a $U_\mathrm{d}(T_\mathrm{a}) = U_\mathrm{a}$ d'où

$$U_\mathrm{d}(t) = \frac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R} + \left(U_\mathrm{a} - \frac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R}\right)\exp\left(-\frac{t - T_\mathrm{a}}{\tau_\mathrm{e}}\right)\,.$$

5. Pour que la lampe puisse s'éteindre il faut que $\dfrac{ER_\mathrm{d}}{R_\mathrm{d}+R} < U_\mathrm{e}$. Par définition $U_\mathrm{d}(T_\mathrm{e}) = U_\mathrm{e}$, d'où $T_\mathrm{e} = T_\mathrm{a} + \tau_\mathrm{e} \ln\left[\dfrac{RU_\mathrm{a} + R_\mathrm{d}(U_\mathrm{a} - E)}{RU_\mathrm{e} + R_\mathrm{d}(U_\mathrm{e} - E)}\right]$.
6. Au delà du temps T_e on recommence un cycle de charge du condensateur puis, une fois U_a atteinte, un cycle de décharge. Au final on a une alternance d'éclairage et d'extinction de la lampe. En remarquant que lors de la charge initiale on atteint la valeur U_e au temps $t_0 = RC\ln\left(\dfrac{E}{E-U_\mathrm{e}}\right)$, on en déduit que la période du mouvement d'oscillation est $\Delta T = T_\mathrm{e} - t_0$ soit, en revenant aux définitions des divers temps : $\Delta T = \dfrac{R_\mathrm{d}RC}{R_\mathrm{d}+R}\ln\left[\dfrac{RU_\mathrm{a} + R_d(U_\mathrm{a} - E)}{RU_\mathrm{e} + R_\mathrm{d}(U_\mathrm{e} - E)}\right] + RC\ln\left(\dfrac{E-U_\mathrm{e}}{E-U_\mathrm{a}}\right)$.